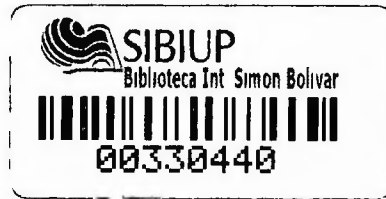


UNIVERSIDAD DE PANAMA  
VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO  
PROGRAMA DE MAESTRIA



**ESTUDIO ESTRATIGRAFICO DEL SECTOR CENTRAL DE LA  
CIUDAD DE PANAMÁ MEDIANTE EL USO DE LA  
TOMOGRAFIA DE REFRACCION Y UN ANALISIS  
MULTICANAL DE ONDAS SUPERFICIALES EN 2 Y 3D**

**RAMIRO VILLARREAL GONZALEZ**

**TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA  
OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON  
ESPECIALIZACION EN FISICA**

**PANAMA REPUBLICA DE PANAMA**

**2018**

57



Título de la Tesis:

**"ESTUDIOS ESTRATIGRÁFICO DEL SECTOR CENTRAL DE LA CIUDAD DE PANAMÁ MEDIANTE EL USO DE LA TOMOGRAFÍA DE LA REFRACCION Y UN ANÁLISIS MULTICANAL DE ONDAS SUPERFICIALES EN 2 Y 3D"**

TESIS

Sometida para optar al título de Maestría en Ciencias Físicas

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología

APROBADO POR:

**Doctor Alexis Mojica**  
**Presidente**

**Prof. Moisés Ortega**  
**Miembro**

**Prof. Orlando Concepción**  
**Miembro**

REFRENDADO POR:

**REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA**  
**DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO**

FECHA:

\_\_\_\_\_

9 JUL 2018

Abelardo Autor

*El científico no estudia la Naturaleza por la utilidad que le pueda reportar; la estudia por el gozo que le proporciona, y este gozo se debe a la belleza que hay en ella ... la belleza intelectual se basta a sí misma, y es por ella, más que quizás por el bien futuro de la humanidad, por lo que el científico consagra su vida a un trabajo largo y difícil.*

HENRI POINCARÉ

## **Dedicatoria**

Deseo dedicar este trabajo a mi familia, la cual siempre me ha apoyado y en especial a mi hija, Lía, que tanto amo. Cada uno de ellos son fuentes de esperanza y orientación.

## **Agradecimiento**

Ante todo, agradezco a Dios por darme la salud para continuar en esta etapa de mi vida. Posteriormente quiero agradecer al Dr. Alexis Mojica por brindarme su apoyo, paciencia y facilitarme parte de sus grandes conocimientos en esta área de las Ciencias Naturales, que sin su ayuda, no habría sido posible esta investigación. Al Ing. Eduardo Silva (3P Sociedad Ltda.), por facilitarnos los dispositivos para llevar a cabo los ensayos sísmicos. Finalmente, quiero agradecer a los profesores jurados Moisés Ortega y Eduardo Concepción por regalarme algo de su tiempo.

## Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimiento</b>	<b>ii</b>
<b>Índice General</b>	<b>iii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Índice de Cuadros</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Noción de señales e imágenes digitales . . . . .	3
1.2. Objetivos del trabajo . . . . .	3
1.3. Estado del arte . . . . .	4
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	6

<b>2. Espacios Clásicos en Análisis de una Señal y Algoritmos de Proyección Ortogonal</b>	<b>8</b>
2.1. Espacios prehilbertianos o euclidianos . . . . .	8
2.2. Formulación geométrica . . . . .	10
2.3. Noción de espacio de Hilbert (ejemplos) . . . . .	11
2.4. Propiedades de los espacios de Hilbert . . . . .	13
2.4.1. Suma vectorial: . . . . .	14
2.4.2. Multiplicación escalar: . . . . .	14
2.4.3. Definición del producto escalar: . . . . .	14
2.4.4. Vínculo entre el producto escalar y la norma: . . . . .	15
2.5. Algoritmos de proyección ortogonal . . . . .	16
<b>3. Análisis de Fourier</b>	<b>18</b>
3.1. Transformación de Fourier de las funciones no periódicas . . . . .	18
3.2. Significado físico de la transformación de Fourier . . . . .	20
3.3. Señales deterministas . . . . .	22
3.4. La Transformada de Fourier Discreta (TFD) . . . . .	22
3.5. Aspectos algorítmicos de la Transformada de Fourier (TF) - Algoritmo de Cooley-Tuckey . . . . .	26
<b>4. Prospección Sísmica de una Zona Ubicada en la Parte Occidental de la Ciudad de Panamá</b>	<b>30</b>
4.1. Generalidades . . . . .	30
4.2. Análisis de las ondas $P$ y $S$ en estudios geotécnicos . . . . .	33

4.2.1. Estudios de las ondas $P$ . . . . .	34
4.2.2. Análisis multicanal de ondas superficiales para inferir los valores de velocidad de onda $S$ . . . . .	35
4.2.2.1. Naturaleza de las ondas Rayleigh y el fenómeno de la dispersión geométrica . . . . .	37
4.2.2.2. Inversión de las curvas de dispersión $v_{fase}$ vs frecuencia .	39
4.3. Presentación de un caso: los suelos saprolíticos del Campus Universitario Dr. Victor Levi Sasso, Universidad Tecnológica de Panamá . . . . .	42
4.3.1. Características generales del área de trabajo: localización, geología e información geotécnica disponible . . . . .	42
4.3.2. Metodología de investigación . . . . .	46
4.4. Resultados experimentales obtenidos en el estudio . . . . .	49
4.4.1. Los estudios de onda de compresión - onda $P$ . . . . .	49
4.4.2. Los estudios de onda de corte - onda $S$ . . . . .	58
4.4.3. Estudio de la razón $v_P/v_S$ y coeficiente de Poisson . . . . .	67
<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>74</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>76</b>



## Índice de figuras

3.1.	Función establecida en el intervalo $-\infty$ hasta $+\infty$ . . . . .	19
3.2.	Función establecida en tres intervalos, uno conocido y dos desconocidos. . . . .	20
3.3.	Gráfico representativo del significado físico de la transformación de Fourier (Max, 1972). . .	21
3.4.	Representación gráfica de la célula mariposa. . . . .	27
3.5.	Algoritmo de Cooley-Tuckey $n/2 = 2^{k-1} \rightarrow n = 2^k$ . . . . .	28
4.1.	Representación gráfica de los dos tipos de ondas internas: ondas $P$ y ondas $S$ . Fuente: blog.educastur.es/eureka/1 <sup>0</sup> -bach-cmc/dinamica-terrestre/. . . . .	31
4.2.	Sistema de adquisición clásico utilizado para una prospección sísmica, receptores o sensores equi-espaciados, fuente activa (martillo) y características de las formas de onda (longitudes de onda diferentes) en diferentes estratos. . . . .	34
4.3.	Representación generalizada de las trayectorias de las ondas $P$ y sus respectivos frentes de onda a través de un medio estratificado; los triángulos invertidos representan los sensores (receptores) o geófonos. . . . .	35
4.4.	Representación gráfica de los dos tipos de ondas superficiales: ondas Love y Rayleigh. Fuente: blog.educastur.es/eureka/1 <sup>0</sup> -bach-cmc/dinamica-terrestre/. . . . .	37

4 5	Modo de propagacion de las ondas Rayleigh y su carácter dispersivo (Munoz Martin y Gorosabel (2006)	39
4 6	(a) Ubicacion geografica de la zona de interes y (b) mapa geológico generalizado del area bajo estudio y alrededores fuente Stewart <i>et al</i> (1980)	43
4 7	Distribucion de los 4 perfiles establecidos y perforaciones en el area de interes	44
4 8	Resultados de las perforaciones realizadas en el sitio de interes	45
4 9	(a) Caracteristicas generales de parte del area de interes (b) accesorios utilizados en el estudio sismografo tipo ES 3000 de Geometrics bateria de 12 V laptop y multicable (c) geofonos de 4 5 y 14 Hz cable de trigger placa y martillo	47
4 10	Distribución de los geófonos y puntos de impacto o shot points para estudios de onda (a) $P$ y (b) $S$	48
4 11	Formas de onda del primer punto de impacto ( $SP_1 = 0$ ) en el Perfil 1 e identificacion de los tiempos de llegada de las ondas de compresion a cada sensor (ver linea roja vertical en cada forma de onda)	50
4 12	Graficos o dromocronas de tiempo (traveltime) en funcion de la distancia (directo y reverso) para los 5 puntos de impactos ejecutados en el Perfil 1	51
4 13	Representación grafica de la fuente sismica un receptor y el suelo estratificado (dos capas de diferentes velocidades de onda $P$ ) con un primer estrato de espesor $z$	52
4 14	Representación grafica de la fuente sismica un receptor y el suelo estratificado (dos capas de diferentes velocidades de onda $P$ ) considerando un estrato superficial de espesor variable	54
4 15	Tomografia de retraccion sismica obtenida en el Perfil (a) 1 (b) 2 (c) 3 y (d) 4 mostrando cada una de ellas el numero total de interacciones y el error promedio obtenido una vez resuelto el problema inverso	56

4 16	Diferentes proyecciones 3D sobre la distribución espacial de los valores de velocidad de onda $P$ calculados en el sitio de interés	58
4 17	Ejemplo de las formas de onda $S$ obtenidas en el Perfil 2 para los puntos de impacto o shot points establecidos en las posiciones (a) 1 m (b) 7 m (c) 17 m y (d) 31 m	59
4 18	Ejemplo correlaciones cruzadas para un primer shot point en el análisis multicanal de ondas superficiales 2D (Jiani <i>et al</i> 2013)	61
4 19	Correlaciones cruzadas para 10 shot points con un shot igual al intervalo (Jiani <i>et al</i> 2013)	62
4 20	Ejemplo de correlaciones cruzadas para los grupos CMP del Perfil 3	63
4 21	Curvas de dispersión velocidad de fase de la onda Rayleigh en función de la frecuencia para el Perfil 3	64
4 22	Tomografías de onda de corte u onda $S$ para los perfiles (a) 1 (b) 2 (c) 3 y (d) 4	65
4 23	Diferentes proyecciones 3D sobre la distribución espacial de los valores de velocidad de onda $S$ calculados en el sitio de interés	66
4 24	Tomografías de la razón $v_P/v_S$ para los perfiles (a) 1 (b) 2 (c) 3 y (d) 4	69
4 25	Tomografías del coeficiente de Poisson para los perfiles (a) 1 (b) 2 (c) 3 y (d) 4	70
4 26	Diferentes proyecciones 3D sobre la distribución espacial de los valores de la razón $v_P/v_S$ en el sitio de interés	72
4 27	Diferentes proyecciones 3D sobre la distribución espacial de los valores del coeficiente de Poisson en el sitio de interés	73

## Índice de cuadros

4.1. Rango de valores del Coeficiente de Poisson ( $\sigma$ ) para algunos tipos de suelos (Trautmann y Kulhawy, 1987). . . . .	71
---	----

## Resumen

En este trabajo de investigación se presentan algunos tópicos relacionados a una señal digital, por ejemplo una señal sísmica. Desde una perspectiva práctica, se analizan las formas de onda o señales sísmicas, obtenidas en los suelos saprolíticos del campus de la UTP Dr. Víctor Levi Sasso (ciudad capital), a lo largo de 4 perfiles paralelos, de 30 m de longitud cada uno. Un total de dos pruebas sísmicas fueron desarrolladas en cada perfil, con la finalidad de obtener la distribución (lateral y en profundidad) de los valores de velocidad de las ondas de compresión ( $v_P$ ), las ondas de corte ( $v_S$ ), la razón  $v_P/v_S$  y coeficiente de Poisson; para la distribución espacial 2D de las primeras, un esquema de inversión, del tipo time-term inversion, fue desarrollado obteniéndose valores de  $v_P$  que oscilan entre 400 y 600 m/s. Por su parte, la distribución espacial 2D de los valores de  $v_S$  (comprendidos entre 221 y 311 m/s) fueron obtenidos mediante un análisis multicanal de ondas superficiales, y a partir de estos resultados se calcularon los valores de la razón  $v_P/v_S$  y coeficiente de Poisson. Cada conjunto de datos, se caracteriza por presentar información en el plano x-y y en profundidad z, con su respectivo parámetro elástico del subsuelo; finalmente una interpolación 3D, permitió una mejor interpretación de los estratos característicos del sitio. Todos estos análisis, en conjunto con la combinación de los valores de  $v_P$  y  $v_S$  en el espacio 3D, ofreció información valiosa de la distribución del limo arenoso, el limo elástico arenoso y la roca ígnea característica del sitio.

## **Abstract**

In this research work, some topics related to a digital signal (for example, a seismic signal) are presented. From a practical perspective, waveforms or seismic signals, obtained in the saprolitic soils of the Dr. Víctor Levi Sasso UTP Campus (capital city), are analyzed along 4 parallel profiles, each one 30 m long. A total of two seismic tests were developed in each profile, in order to obtain the distribution (lateral and in depth) of the values of compression wave velocity ( $v_P$ ), cutting waves ( $v_S$ ), the ratio  $v_P/v_S$  and Poisson's coefficient. For the 2D spatial distribution of the first, an inversion scheme, of the time-term inversion type, was developed, obtaining  $v_P$  values ranging between 400 and 600 m/s. On the other hand, the spatial distribution 2D of the values of  $v_S$  (between 221 and 311 m/s) were obtained through a multichannel analysis of surface waves, and from these results the values of the ratio  $v_P/v_S$  and Poisson's coefficient were calculated. Each data set is characterized by presenting information in the x-y plane and in depth z, with its respective elastic parameter of the subsoil; finally a 3D interpolation, allowed a better interpretation of the characteristic strata of the site. All these analyzes, together with the combination of  $v_P$  and  $v_S$  values in the 3D space, offered valuable information on the distribution of sandy silt, sandy sand silt and characteristic igneous rock at the site.

# **Capítulo 1**

## **Introducción**

### **1.1. Noción de señales e imágenes digitales**

Si bien es cierto, los conceptos de señales y sistemas (imágenes) surgen en una notable variedad de campos. Las ideas y las técnicas asociadas con dichos conceptos juegan un rol importante en disciplinas tan diversas de la ciencia y la tecnología como por ejemplo: las comunicaciones, la aeronáutica y astronáutica, el diseño de circuitos, la acústica, la fisiología, la ingeniería biomédica, los sistemas de generación y distribución de energía, el control de procesos químicos y el procesamiento de voz (Oppenheim y Willsky, 1998). Aun cuando la naturaleza física de las señales y los sistemas que surgen en todas estas disciplinas puede ser bastante diferente, todas ellas tienen dos características básicas en común. Las señales, las cuales son funciones de una o más variables independientes, contienen información acerca del comportamiento o la naturaleza de algún fenómeno.

### **1.2. Objetivos del trabajo**

El objetivo general de esta investigación se focaliza en comprender cierto tipo de señales que son muy comunes en el ámbito de Ciencias de la Tierra, sin dejar de lado las aplicacio-

nes que las mismas conllevan en la comprensión de las capas más superficiales de nuestro planeta, ofreciendo un enfoque general acerca del planteamiento del problema inverso al utilizar técnicas de prospección sísmica (fuente activa). De forma específica, este trabajo de tesis se centra en

1. Establecer 4 perfiles paralelos de 30 m de longitud cada uno en dirección Sureste - Noroeste.
2. Obtener tomogramas de refracción sísmica de velocidad de onda  $P$  mediante el uso del método de inversión de término temporal en cada uno de los 4 perfiles establecidos.
3. Obtener tomogramas de onda  $S$  mediante el uso del análisis multicanal de ondas superficiales y una correlación cruzada en cada uno de los 4 perfiles establecidos.
4. A partir de los datos invertidos de onda  $P$  y  $S$ , obtener dos nuevos tomogramas de la razón  $v_P/v_S$  y el coeficiente de Poisson ( $\sigma$ ) en cada perfil.
5. Generar tomogramas tridimensionales de los parámetros elásticos del subsuelo:  $v_P$ ,  $v_S$ ,  $v_P/v_S$  y el coeficiente de Poisson ( $\sigma$ ), para identificar los estratos que caracterizan los suelos del sector Noroeste de la ciudad de Panamá.

### **1.3. Estado del arte**

David Hilbert (1862-1943), como un influyente matemático de la época, había llevado a cabo una intervención en el Congreso Internacional de Matemáticas, el cual se dio lugar en París en el año 1900; en dicho congreso, Hilbert planteó un total de 23 problemas que en el



fondo lograron modelar de forma notable el desarrollo de las matemáticas en el siglo XX. En este periodo, el dominio de investigación de Hilbert se encontraba centrado en las ecuaciones integrales. A finales del siglo XIX, en una serie de manuscritos científicos titulado *Fundamentos de una Teoría General de las Ecuaciones Integrales*, Hilbert llevó a cabo un análisis profundo sobre los mecanismos desarrollados por Poincaré y Fredholm para resolver estas ecuaciones, obteniéndose entonces una mejora en los resultados encontrados. Una publicación llevada a cabo en el año 1906 sobre su artículo no 4 de la mencionada serie, Hilbert demuestra que las ecuaciones integrales podían resolverse como un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas.

En la actualidad, se estudian los sistemas de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas, 3 números ligados por las ecuaciones cuyo valor se desea calcular. Estos números se pueden ver como las coordenadas (largo, ancho y alto) de un punto en el espacio, lo que permite usar herramientas geométricas como ángulos y distancias para resolver el sistema. Lo que hizo Hilbert fue construir herramientas geométricas y análogas para un espacio llamado *Espacio de Hilbert*, en el que los puntos tienen infinitas coordenadas, no solo las tres cotidianas (Paul, 2006).

Dicho artículo (publicado en el año 1906) corresponde al primer hito en la historia del Análisis Funcional, que así se llama el estudio de las funciones consideradas dentro de un espacio común, no como entes aislados y de las transformaciones geométricas de unas funciones en otras que pueden llevarse a cabo. Como muestras de la importancia del Análisis Funcional en estos 100 años, tanto en su vertiente de herramienta aplicable a otras discipli-

nas como de motor del desarrollo interno de las matemáticas, basta el saber que el Espacio de Hilbert constituye una poderosa herramienta esencial de la formulación matemática de la Mecánica Cuántica, realizada por Dirac y Von Neumann. Hoy día se cuenta con una extensa referencia bibliográfica que hace mención al tema, por ejemplo cabe citar a: Debnath y Mikusiński, (2005); Akhiezer y Glasman (2013), Alabiso y Weiss (2015), entre otros.

#### **1.4. Estructura de la tesis**

Este trabajo de investigación se encuentra estructurado de forma tal que, en el segundo capítulo se hace una introducción a los espacios clásicos en análisis de una señal y algoritmos de proyección ortogonal, cubriendo los aspectos teóricos relacionados con los espacios prehilbertianos o euclidianos, seguido de una representación numérica para luego pasar a la definición del Espacio de Hilbert y sus propiedades más importantes. En el tercer capítulo se hace referencia a la Transformada de Fourier y sus características más importantes como por ejemplo, su significado físico, su estructura desde la perspectiva discreta hasta llegar a los fundamentos algorítmicos ligados a la Transformada Rápida de Fourier. Este concepto tiene una connotación sumamente importante en el entendimiento de la naturaleza de las señales sísmicas y el procesamiento numérico de imágenes digitales. El cuarto capítulo contempla el estudio de las señales sísmicas con la finalidad de obtener información en 2 y 3 dimensiones de la distribución real de algunos parámetros elásticos de los suelos que ocupan un sector importante del Campus de la UTP, Dr. Víctor Levi Sasso; dichos parámetros incluyen la:  $v_P$ ,  $v_S$ ,  $v_P/v_S$  y el coeficiente de Poisson ( $\sigma$ ). En este punto se podrán verificar las limitaciones de uno de los métodos utilizados para estudiar la distribución lateral y en profundidad de los estratos que caracterizan el área de interés y con ello, la factibilidad de

llevar a cabo combinaciones de valores de  $v_P$  y  $v_S$  para obtener mejores resultados en este tipo de análisis.

## Capítulo 2

# Espacios Clásicos en Análisis de una Señal y Algoritmos de Proyección Ortogonal

### 2.1. Espacios prehilbertianos o euclidianos

Uno de los puntos más importantes a señalar es la definición de espacio vectorial real euclidiano, dotado de un producto escalar. Se trata por ende de una noción importante debido a que esta clase de espacios, se encuentra caracterizada por la geometría pitagórica, la cual es esencial en la teoría de la modelización, del tratamiento o de la predicción de una información o de una señal.

Se conoce con el nombre de espacio euclidiano (prehilbertiano) a los datos de un espacio vectorial  $H$  sobre el conjunto de los números reales, acompañada de un producto escalar (denotada como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ); en otras palabras: en el caso de los reales, una aplicación  $\mathbf{R}$ -bilineal:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \mapsto \mathbf{R}$$

Un espacio dotado de un producto escalar induce entonces una estructura del espacio vectorial normado. Denotaremos como  $\| \cdot \|$  la norma sobre  $H$  que se deriva del producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

## 2.2. Formulación geométrica

Utilizando la bilinealidad y la simetría del producto escalar en el caso real, la sesquilinealidad y la hermitianidad en el caso complejo, vemos que posee las identidades:

$$\|s_1 + s_2\|^2 + \|s_1 - s_2\|^2 = 2(\|s_1\|^2 + \|s_2\|^2), \quad s_1, s_2 \in H \quad (2.3)$$

(llamada ley del paralelogramo), y:

$$\begin{cases} \|s_1 + s_2\|^2 = \|s_1\|^2 + \|s_2\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle s_1, s_2 \rangle, & s_1, s_2 \in H \quad \text{caso complejo} \\ \|s_1 + s_2\|^2 = \|s_1\|^2 + \|s_2\|^2 + 2 \langle s_1, s_2 \rangle, & s_1, s_2 \in H \quad \text{caso real} \end{cases} \quad (2.4)$$

(conocidas como identidades de Pitágoras). La ley del paralelogramo induce a aquel formalismo matemático conocido con el nombre de fórmula de la mediana:

$$\left\| s_0 - \frac{s_1 + s_2}{2} \right\|^2 + \frac{1}{4} \|s_1 - s_2\|^2 = \frac{1}{2} (\|s_0 - s_1\|^2 + \|s_0 - s_2\|^2), \quad s_0, s_1, s_2 \in H \quad (2.5)$$

(es suficiente aplicar la ecuación (2.3) y reemplazar  $s_j$  por  $\frac{s_0 - s_j}{2}$ ,  $j = 1, 2$ ). Lo positivo del producto escalar implica en el caso real que, si  $s_1$  y  $s_2$  son dos elementos de  $H$ , la

función trinomial

$$\lambda \in \mathbf{R} \mapsto \langle s_1 + \lambda s_2, s_1 + \lambda s_2 \rangle = \lambda^2 \|s_2\|^2 + 2\lambda \langle s_1, s_2 \rangle + \|s_1\|^2 \quad (2.6)$$

es positivo; en el caso complejo, la función trinomial compleja

$$\lambda \in \mathbf{C} \mapsto \langle s_1 + \lambda s_2, s_1 + \lambda s_2 \rangle = |\lambda|^2 \|s_2\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda \langle s_1, s_2 \rangle) + \|s_1\|^2 \quad (2.7)$$

toma los valores en  $[0, \infty]$ . Esto implica, en el caso real, que el discriminante del trinomio (2.6) es negativo, en donde la inigualdad

$$|\langle s_1, s_2 \rangle| \leq \|s_1\| \|s_2\|, \quad s_1, s_2 \in H, \quad (2.8)$$

se le conoce con el nombre de inigualdad de Cauchy - Schwarz; en el caso complejo, se puede notar que al especificar  $\lambda = te^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ , se tiene la misma inigualdad (con los módulos en lugar de los valores absolutos). Es importante recalcar que la inigualdad (2.8) es estricta si  $s_1$  y  $s_2$  son colineales, la inigualdad (2.8) se transforma en una igualdad.

### 2.3. Noción de espacio de Hilbert (ejemplos)

La noción de espacio de Hilbert es un poco más restrictiva. Un espacio vectorial real o complejo  $H$  dotado de un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un espacio de Hilbert si y solo si  $(H, \|\cdot\|)$  (siendo la norma inducida por el producto escalar) es un espacio de Banach. Es importante recordar que esto significa que  $H$ , dotado de esta norma, satisface una de las condiciones equivalentes siguientes:

1. Toda secuencia de Cauchy es convergente;
2. Si  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una secuencia decreciente (en el sentido de la inclusión) de sus conjuntos cerrados de  $H$  donde el diámetro tiende a 0, la intersección de todos los  $C_k$  es no vacío y reducido a un semifallo.
3. Toda serie  $(\sum_k s_k)$ ,  $s_k \in H$ , tal que  $\sum_{k=0} \lVert s_k \rVert < \infty$ , converge en  $H$ .

Veamos algunos ejemplos que conciernen a este trabajo de investigación: Si  $N$  es un entero estrictamente positivo, el espacio  $\mathbf{R}^N$  (resp.  $\mathbf{C}^N$ ) es un espacio de Hilbert cuando está dotado de un producto escalar

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{k=1}^N x_k \overline{y_k}, \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

Se puede pensar como un espacio de funciones, ya que se puede identificar el vector  $X$  con la función  $\{1, \dots, N\} \mapsto \mathbf{C}, k \mapsto X(k) = x_k$ . Esta función corresponde a una *señal digital real* como por ejemplo, un sismograma.

De igual forma, si  $N_1$  y  $N_2$  son dos enteros estrictamente positivos, el espacio de las matrices reales  $I$  de tipo  $N_1 \times N_2$ , equipado del producto escalar:

$$\langle I_1, I_2 \rangle := \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} I_1(k_1, k_2) I_2(k_1, k_2)$$

es un espacio de Hilbert; un elemento de este espacio corresponde a una *imagen digital real* de tipo  $(N_1, N_2)$ . Cada punto marcado en una tabla  $I(k_1, k_2)$  representa la intensidad (medido con una unidad conveniente) de aquello que conviene llamar *pixel*.

## 2.4. Propiedades de los espacios de Hilbert

El concepto de espacio de Hilbert es una generalización del concepto de espacio euclidiano. Gracias a esta generalización nociones algebraicas y geométricas aplicables a espacios de dimensión finita se pueden extender a espacios de dimensión arbitraria, incluso a espacios de dimensión infinita. Algunas de estas nociones son, como por ejemplo, la de ángulo entre vectores, ortogonalidad de vectores, el teorema de Pitágoras, proyección ortogonal, distancia entre vectores y convergencia de una sucesión. Más formalmente, este tipo de espacio se define como un espacio de producto escalar, que es completo con respecto a la norma vectorial definida por dicho producto escalar. El nombre dado a estos espacios es en honor al matemático alemán David Hilbert (1862-1943), quien los utilizó en sus estudios de las ecuaciones integrales.

Más formalmente, se define como un espacio de producto interior, que es completo con respecto a la norma vectorial definida por dicho producto interior. Los espacios de Hilbert sirven para clarificar y para generalizar el concepto de expansión de Fourier. Ciertas transformaciones lineales tales como por ejemplo, la transformación de Fourier que son de importancia crucial en la formulación matemática de la Física Cuántica. De manera que los espacios de Hilbert han sido de gran importancia en el ámbito científico. Por otro lado, los espacios de Hilbert y sus propiedades se estudian dentro de una rama de la matemática, llamada análisis funcional. A continuación mostremos las propiedades más importantes de este espacio. Para todo  $f$  que sea un elemento de este espacio, él mismo debe cumplir los axiomas de linealidad:



#### 2.4.1. Suma vectorial:

- (i)  $\forall f_1 \wedge f_2 \in L_2 \Rightarrow (f_1 + f_2) \in L_2$
- (ii)  $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$  conmutatividad
- (iii)  $f_1 + (f_2 + f_3) = (f_1 + f_2) + f_3$  asociatividad
- (iv)  $\exists 0 \in L_2$  tal que  $0 + f = f$
- (v)  $\exists (-f) \in L_2$  tal que  $f + (-f) = 0$

#### 2.4.2. Multiplicación escalar:

- (vi)  $\forall z \in C \Rightarrow zf \in L_2$
- (vii)  $z(f_1 + f_2) = zf_1 + zf_2$  distributividad
- (viii)  $\forall z_1 \wedge z_2 \in C$  se tiene  $(z_1 + z_2)f = z_1f + z_2f$
- (ix)  $z_1(z_2f) = (z_1z_2)f$  asociatividad
- (x)  $1f = f$

#### 2.4.3. Definición del producto escalar:

$$\forall f_1 \wedge f_2 \in L_2$$

Tenemos que el producto escalar de estos dos elementos está dado por:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x) f_2(x) dx \quad (2.9)$$

En donde se exige que exista la integral, es decir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x) f_2(x) dx < \infty \quad (2.10)$$

#### 2.4.4. Vínculo entre el producto escalar y la norma:

El vínculo entre el producto escalar y la norma está dado, en términos de un elemento  $f(x)$ , por:

$$\langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \quad (2.11)$$

y de aquí, se tiene que:

$$|f| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx} \quad (2.12)$$

Y las propiedades de este producto escalar son entonces:

- (i)  $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle^*$  conmutatividad
- (ii)  $\langle f_1, (f_1 + f_2) \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle + \langle f_1, f_3 \rangle$  distributividad
- (iii)  $\langle f_1, z f_2 \rangle = \langle z^* f_1, f_2 \rangle = z \langle f_1, f_2 \rangle$
- (iv)  $\langle f, f \rangle > 0$  tal que  $f \neq 0$
- (v)  $\langle f, f \rangle = \|f\|^2 \leftrightarrow \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$
- (vi)  $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$  si  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$  ó son ortogonales

Y en relación a las propiedades de la norma, se tiene que:

- (i)  $\|0\| = 0, \|f\| > 0$  para todo  $f \neq 0$
- (ii)  $\|zf\| = |z| \|f\|$
- (iii)  $|\langle f_1, f_2 \rangle| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2\|$  desigualdad de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz
- (iv)  $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$  desigualdad de Minkowski

Hay que hacer la aclaración de la forma en que se escribe  $f(x)$ , la cual es la siguiente:

$$f(x) = g(x) + ih(x)$$

En donde,  $g(x)$  y  $h(x)$  son funciones reales continuas, de las cuales existe su integral cuadrada, y por otro lado  $i$  es la unidad imaginaria. Finalmente, apreciamos las analogías entre estas propiedades del espacio de Hilbert y las propiedades del espacio  $\mathbf{R}^n$ .

## 2.5. Algoritmos de proyección ortogonal

El mejor resultado en un espacio de Hilbert (sustentando la teoría de la optimización en análisis numérico) es el teorema de proyección y su realización algorítmica, con todas las versiones iterativas por supuesto. Veamos los resultados de base bien conocidos:

**Teorema:** Sea  $C$  un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de un espacio de Hilbert real  $H$ . Sea  $s$  un elemento de  $H$ . Existe uno y solo un elemento  $a = P_C[s]$  (conocido como proyección ortogonal de  $s$  sobre  $C$ ), de tal forma que:

$$\|s - a\| = \min_{x \in C} \|s - x\| \quad (2.13)$$

Este elemento se encuentra caracterizado por el juego de desigualdades siguientes:

$$\forall \in C, \langle s - a, x - a \rangle \leq 0 \quad (2.14)$$

en el caso real:

$$\forall \in C, \operatorname{Re} \langle s - a, x - a \rangle \leq 0 \quad (2.15)$$

Las desigualdades (2.10) y (2.11) se interpreta geoméricamente y de manera intuitiva diciendo que para todo  $x$  de  $C$ , los vectores  $x - a$  y  $s - a$  forman un ángulo obtuso. Es conveniente notar (por ejemplo en el caso complejo) que:

$$\forall z_1, z_2 \in H, \cos(z_1, z_2) := \frac{\operatorname{Re} \langle z_1, z_2 \rangle}{\|z_1\| \|z_2\|}$$

La condición (2.11) se puede leer:  $\forall x \in C, \cos(s - a, x - a) \leq 0$ .

Este teorema es un resultado clásico: la fórmula de la mediana (2.5) muestra que un conjunto de puntos de  $C$  haciendo la distancia de  $s$  a  $C$  de manera aproximada, es necesariamente de Cauchy, donde converge; se verifica enseguida que el límite obedece bien a las restricciones geométricas intuitivas (2.10) ó (2.11).

## Capítulo 3

### Análisis de Fourier

#### 3.1 Transformación de Fourier de las funciones no periódicas

Nosotros podemos considerar esta no periodicidad como el resultado de una extensión al infinito del periodo  $T$ . El intervalo de frecuencias  $\nu = 1/T$  tiende entonces a 0 y el espectro viene dado por una función que puede ser continua. Se tiene entonces que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu t} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) e^{-2\pi i \nu \sigma} d\sigma \quad (3.1)$$

y se tiene que

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \quad (3.2)$$

la cual se le conoce con el nombre de transformada de Fourier de  $x(t)$  y se escribe habitualmente como  $x(t) \Leftrightarrow X(\nu)$ .  $X(\nu)$  es una función de  $\nu$  por lo general compleja que comprende por ende una parte real (o una fase) y una parte imaginaria (o en cuadratura)

$$\Re[X(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi \nu t) dt \quad (3.3)$$

y

$$\Im[X(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi\nu t) dt \quad (3.4)$$

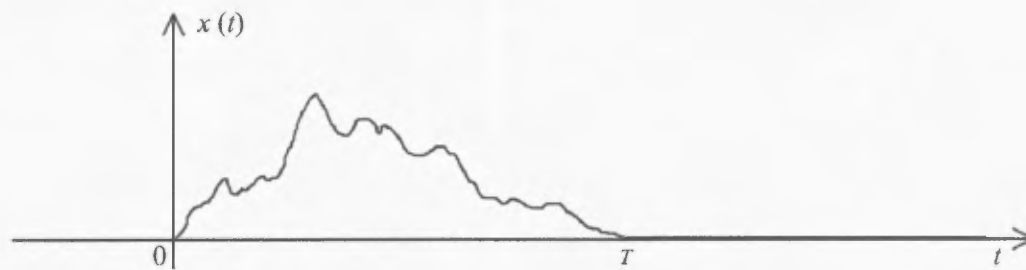
El espectro de amplitudes está dado por:

$$|X(\nu)| = \sqrt{\{\Re[X(\nu)]\}^2 + \{\Im[X(\nu)]\}^2} \quad (3.5)$$

Y el espectro de fases está representado por:

$$\psi(\nu) = \tan^{-1} \left( -\frac{\Im[X(\nu)]}{\Re[X(\nu)]} \right) \quad (3.6)$$

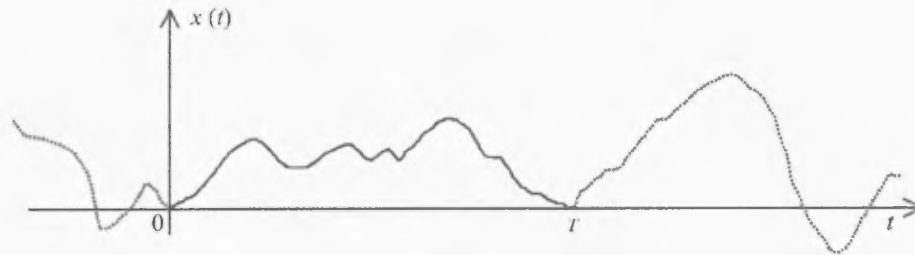
Cuando se considera una función física, conocida en un intervalo limitado  $(0, T)$ , entonces se pueden dar 2 casos: en el primero se sabe que la función es nula fuera de este intervalo; por ende conocer la función en el intervalo  $(0, T)$  da la oportunidad de tener información entre el  $-\infty$  hasta el  $+\infty$  (ver Figura 3.1).



**Figura 3.1:** Función establecida en el intervalo  $-\infty$  hasta  $+\infty$ .

Se espera entonces conocer el espectro de esta función con una resolución tan grande como se desee.

En el segundo caso, se conoce la función en el intervalo  $(0, T)$  pero se ignora lo que existe fuera del intervalo de lo que se conoce (ver la Figura 3.2).

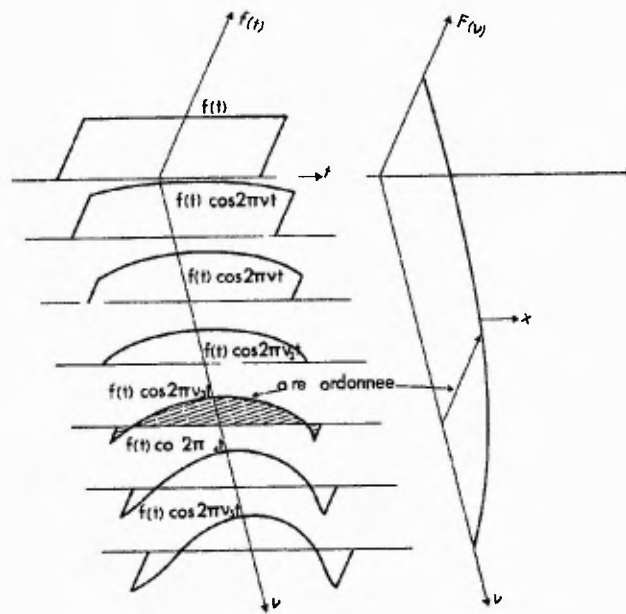


**Figura 3.2:** Función establecida en tres intervalos, uno conocido y dos desconocidos.

Se demuestra entonces que la parte conocida de esta función, permite obtener el espectro con un detalle que no puede ser mayor a  $\nu_0 = \Delta\nu = 1/T$ . En este caso, se refiere a aquella en que la función se conoce bajo forma muestreada por un número  $\eta$  de muestras espaciadas  $\gamma$  veces entre ellas (frecuencia de muestreo  $f_e = 1/\gamma$ ).

### 3.2. Significado físico de la transformación de Fourier

La representación gráfica de la Figura 3.3 nos ofrece una idea acerca de la realización de la transformación de Fourier.



**Figura 3.3** Grafico representativo del significado físico de la transformación de Fourier (Max 1972)

$x(t)$  y  $X(\nu)$  representan la misma entidad física (ecuación 3.2) pero con una representación diferente. Si tomamos en cuenta a  $x(t)$  entonces el punto representativo se desplaza en el dominio amplitud-tiempo; si tomamos en cuenta a  $X(\nu)$  el punto representativo se desplazará en el dominio amplitud-frecuencia. De acuerdo a Max (1972) en la búsqueda del valor de  $X(\nu)$  para un valor  $\nu_0$  de  $\nu$  significa entonces que se busca en toda la historia (y todo el futuro) de  $x(t)$  lo que corresponde a la frecuencia  $\nu_0$ . Esto corresponde a un filtrado infinitamente selectivo. El análisis en frecuencia de  $x(t)$  necesita entonces su conocimiento total. Si como es el caso de la Física la función  $x(t)$  solo se conoce en el intervalo  $0$  a  $T$  es ilusorio de búsqueda a definir su espectro de frecuencias con un detalle superior a  $1/T$ . De igual manera si se desea encontrar  $x(t)$  a partir de  $X(\nu)$  es necesario conocer el espectro para todas las frecuencias hasta el infinito y la fórmula muestra que se trata de la



misma operación de filtrado infinitamente selectivo que intervienen: las variables tiempo y frecuencia se permutan. Esto significa que para conocer perfectamente el valor de  $x(t)$  en un instante  $t$ , se debe disponer de un ancho de banda infinito.

### 3.3. Señales deterministas

Siguiendo a Yger (1999), una señal designa un fenómeno físico, en valores reales o complejos medidos (en términos de la energía local o de amplitud o fase instantáneas) en un determinado sistema de unidades. Por lo general, el fenómeno depende de una variable, la más comunmente materializada por el *tiempo*. Si la misma depende de dos variables, se habla entonces de una *imagen* en vez que de señal. Dado que es poco realista pensar que la medición instantánea de una señal no puede estar viciada de errores, entonces resulta natural modelizar la señal por clases de funciones medibles de  $\mathbf{R}$  o de un intervalo de  $\mathbf{R}$ , a valores en  $\mathbf{C}$  en cuyo caso la definición de señal o imagen tiene significado cuando se habla de un conjunto despreciable.

### 3.4. La Transformada de Fourier Discreta (TFD)

En esta sección se presentará de forma resumida la Transformación de Fourier Discreta de una señal digital o de una imagen. Definamos a  $n$  como un número entero estrictamente positivo y también  $\Lambda_n$  como una entidad compleja de la forma:

$$\Lambda_n = e^{(\frac{-2\pi i}{n})}$$

Definamos además la matriz  $M_n(k, l) = M_n^{kl}, 0 \leq k, l \leq n - 1$ , la cual representa una

matriz inversible, de inversa  $M_n^{-1} = \frac{1}{n} \overline{M_n}$ .

Se trata en realidad de un cálculo inmediato para demostrar este hecho y para esto, podemos recurrir a una identidad clásica:

$$1 + Y + \dots + Y^{n-1} = \begin{cases} n, & \text{si } Z = 1 \\ \frac{1-Y^n}{1-Y}, & \text{si es de otra forma} \end{cases}$$

En particular, si  $Y$  corresponde a la  $n$ -ésima raíz de la unidad, como el caso de  $Z = \Lambda_n^k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , se tiene que:

$$1 + \Lambda_n^k + \dots + \Lambda_n^{k(n-1)} = \begin{cases} n, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si es de otra forma} \end{cases}$$

Dado un vector de números complejos  $s(1), s(2), s(3), \dots, s(n)$ , la cual puede ser representada como una señal digital  $s$  de longitud  $n$ , sabiendo que le corresponde el vector:

$$M_n[s] = (\hat{s}(1), \hat{s}(2), \hat{s}(3), \dots, \hat{s}(n))$$

de la manera siguiente: para todo  $k$  entre 0 y  $n-1$ , se tiene entonces que:

$$\hat{s}(k+1) = \sum_{l=0}^{n-1} s(l+1) \Lambda_n^{kl} \quad (3.7)$$

La restitución de  $s$  a partir de la señal digital  $\hat{s}$  se lleva a cabo realizando las formulaciones

inversas

$$s(l+1) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s(k+1) \Lambda_n^{-kl}, \quad l = 0, \quad n-1 \quad (3.8)$$

Esta proposición elemental nos conduce entonces a la definición

Para una señal digital de longitud  $n \geq 1$

$$s = (s(1) \ s(2), s(3) \quad s(n))$$

Por definición la señal digital de la Transformada de Fourier Discreta de  $s$  es

$$s = (s(1) \ s(2) \ s(3) \quad s(n))$$

o también

$$s(k+1) = \sum_{l=0}^{n-1} s(l+1) \Lambda_n^{kl}, \quad k = 0, \quad n-1$$

Por el momento esta definición asume por el momento un carácter puramente operacional

Pasando al aspecto bidimensional y considerando una imagen digital  $I(k_1 \ k_2)$  con  $k_1 \in \{1, \dots, n_1\}$   $k_2 \in \{1, \dots, n_2\}$  en donde  $n_1$  y  $n_2$  corresponden a dos enteros estrictamente positivos. La Transformada de Fourier Discreta de una imagen digital  $I$  es por definición la nueva imagen digital  $I$  (del mismo tamaño) en donde

$$I(k_1+1, k_2+1) = \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \sum_{l_2=0}^{n_2-1} I(l_1+1, l_2+1) \Lambda_{n_1}^{k_1 l_1} \Lambda_{n_2}^{k_2 l_2} \quad (3.9)$$

para todo  $(k_1 \ k_2) \in \{0, \dots, n_1-1\} \times \{0, \dots, n_2-1\}$ . Para una doble aplicación de la

fórmula inversa (3.2), se propone lo siguiente: Para una imagen digital  $I$  de dimensión  $(n_1, n_2)$  y  $\hat{I}$  su Transformada de Fourier Discreta, se tiene entonces sus formulaciones inversas siguientes:

$$I(l_1 + 1, l_2 + 1) = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \hat{I}(k_1 + 1, k_2 + 1) \Lambda_{n_1}^{-k_1 l_1} \Lambda_{n_2}^{-k_2 l_2} \quad (3.10)$$

para todo  $(l_1, l_2) \in \{0, \dots, n_1 - 1\} \times \{0, \dots, n_2 - 1\}$ . Si ahora  $n$  corresponde a un número par entero ( $n = 2m$ ), se puede entonces definir la Transformada de Fourier Discreta reorientada de una señal digital  $s$  definida sobre  $\{1, \dots, n\}$ , como la señal digital (de la misma dimensión) definida por:

$$\begin{aligned} \hat{s}_c(k + 1) &= \sum_{l=0}^{n-1} s(l + 1) e^{(i\pi l) \Lambda_n^{kl}} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} s(l + 1) \Lambda_n^{\pm \frac{ln}{2}} \Lambda_n^{kl} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} s(l + 1) \Lambda_n^{k - \frac{n}{2}}, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si  $n_1$  y  $n_2$  corresponden a dos pares enteros, la Transformada de Fourier Discreta reorientada de una imagen digital definida sobre  $\{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\}$  será una imagen digital (de igual dimensión) definida por:

$$\hat{I}_c(k_1 + 1, k_2 + 1) = \sum_{l_1=0}^{n_1-1} \sum_{l_2=0}^{n_2-1} I(l_1 + 1, l_2 + 1) \Lambda_{n_1}^{l_1(k_1 - \frac{n_1}{2})} \Lambda_{n_2}^{l_2(k_2 - \frac{n_2}{2})} \quad (3.12)$$

para  $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, n_1 - 1\} \times \{0, \dots, n_2 - 1\}$ .

### 3.5 Aspectos algorítmicos de la Transformada de Fourier (TF) Algoritmo de Cooley Tuckey

Gracias a las formulaciones de Cooley y Tuckey (1966) viene la idea del cálculo algorítmico de la acción de la Transformada de Fourier Discreta donde el valor  $n$  corresponde a una potencia de base 2  $n = 2^k$ . El número de multiplicaciones necesarias para el cálculo de  $M_{2^k}[s]$  se encuentra por lo tanto reducido a  $kn/2$  en lugar de lo que debería ser a priori es decir  $n^2$ . Es esta reducción drástica la que marca hoy día un uso intensivo posible de la Transformación de Fourier Discreta no solamente en el análisis y tratamiento de las señales sino también en las secciones enteras de las matemáticas aplicadas o de la informática (Yger 1999).

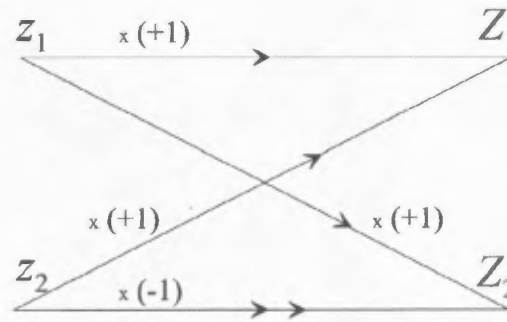
La idea clave de Cooley Tuckey es la de remarcar que si  $n$  está elevado a una potencia 2  $n = 2^k$  entonces  $n/2$  también lo estará ( $N/2 = 2^{k-1}$ ) y por ende

$$\Lambda_n^{n/2} = e^{-i\pi} = -1$$

Es sobre la célula de cálculo elemental conocida con el nombre de célula mariposa en donde se articula toda la arquitectura del algoritmo de Cooley Tuckey se trata de una célula que necesita 2 adiciones (y ninguna multiplicación excepto la multiplicación trivial por 1) y transformando el vector  $(z_1, z_2)$  en el vector célula

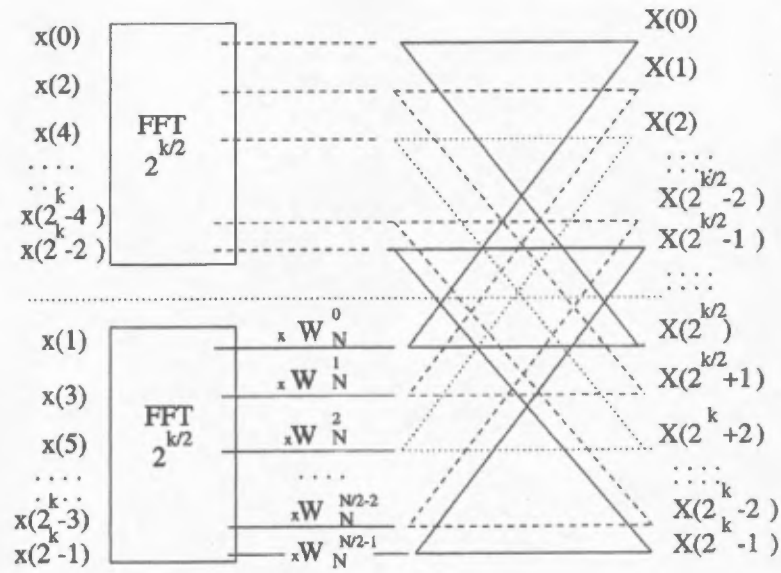
$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

la cual puede ser representada a través del diagrama de la Figura 3.4.



**Figura 3.4:** Representación gráfica de la célula mariposa.

Esta operación corresponde a la Transformada de Fourier Discreta donde  $n = 2$ . Representando ahora sobre el diagrama de la Figura 3.5, la arquitectura del algoritmo correspondiente a  $n = 2^k$  en función de la correspondiente a  $n = 2^{k-1}$ .



**Figura 3.5:** Algoritmo de Cooley-Tukey  $n/2 = 2^{k-1} \rightarrow n = 2^k$ .

Se puede ver que el algoritmo debe comenzar por una fase de reordenamiento de las entradas (que se traducen de hecho por una inversión de pedazos en la escritura del índice de entrada en base a 2); luego, los mecanismos se unen como lo indica el diagrama de la Figura 3.5 y el consumo a nivel de operaciones aritméticas significativas es, como se verá inmediatamente, de:

$$\frac{n}{2} + 2\frac{n}{4} + 4\frac{n}{8} + \dots, 2^{k-1} \frac{n}{2^k} = \frac{kn}{2}$$

como se anunció. En otras palabras, la Transformada Rápida de Fourier consiste de un algoritmo que permite calcular la Transformada de Fourier Discreta y su inversa. El mismo posee una serie de aplicaciones que va desde el filtrado digital hasta el tratamiento digital

de señales, etc. Su desarrollo representó de hecho un avance significativo en el mundo de la informática.



## **Capítulo 4**

### **Prospección Sísmica de una Zona Ubicada en la Parte Occidental de la Ciudad de Panamá**

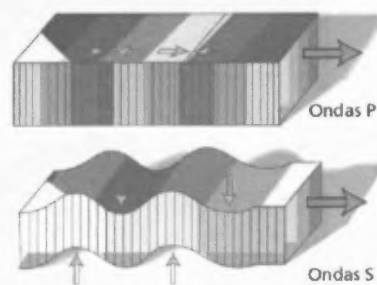
#### **4.1 Generalidades**

Esta bien definido que dentro del dominio de las ondas elásticas fuertes se encuentran las ondas sísmicas estando las mismas catalogadas como un tipo de onda fuerte en la propagación de perturbaciones en el dominio temporal del campo de tensiones cuya fuente puede deberse al resultado de movimientos pequeños en las placas tectónicas de nuestro planeta. Este tipo de ondas se caracteriza porque pueden ser generadas naturalmente (por ejemplo para el caso de los terremotos) y artificialmente (uso de explosivos u otro tipo de sistemas mecánicos). Las primeras son las causantes de daños en poblados y las segundas son el objeto de la prospección sísmica. La rama de la Sismología estudia estas ondas tanto volumétricas como recursos que son de vital importancia para el ser humano (formaciones rocosas, reservorios petroleros, limitaciones de tectónica de placas, etc).

Las ondas sísmicas pueden ser representadas como un espacio de funciones (ver sección 2.3 sobre noción de espacio de Hilbert) y ellas se pueden dividir en dos clases: las internas

y superficiales. Las primeras se caracterizan porque pueden viajar a través del interior del planeta experimentando trayectorias curvas debido al extenso rango de densidad y composición que poseen las capas internas de nuestro planeta. Dichos fenómenos naturales guardan una cierta analogía con la refracción óptica. Las ondas internas transmiten los temblores preliminares de un terremoto pero poseen poco poder destructivo. Estas ondas a su vez se dividen en dos grupos: las ondas primarias u ondas  $P$  y secundarias u ondas  $S$ .

Las ondas  $P$  son ondas longitudinales o de descompresión cuya propagación implica cambios de volumen en el medio y tienen la capacidad de atravesar sólidos y fluidos. Por otro lado, las ondas  $S$  o de cizalla corresponden a las ondas transversales u ondas de desplazamiento y se propagan solamente a través de materiales sólidos. La Figura 4.1 muestra la naturaleza de estos dos tipos de ondas, las cuales son parte del sujeto de estudio de este trabajo de tesis.



**Figura 4.1:** Representación gráfica de los dos tipos de ondas internas: ondas  $P$  y ondas  $S$ . Fuente: [blog.educastur.es/eureka/10-bach-cmc/dinamica-terrestre/](http://blog.educastur.es/eureka/10-bach-cmc/dinamica-terrestre/).

La importancia del estudio de este tipo de ondas radica en el hecho de que sus magnitudes se encuentran estrechamente relacionadas con algunos parámetros geotécnicos, lo que

permite un mayor conocimiento de las propiedades mecánicas del subsuelo y con esto un mejor control en la toma de decisiones en cuanto a edificaciones seguras etc. De acuerdo a Foti *et al* (2015) las velocidades de propagación de las ondas sísmicas en un sólido elástico lineal se encuentran asociadas con los parámetros mecánicos del medio mediante relaciones simples. Ciertamente la respuesta mecánica de un medio elástico está totalmente caracterizado por dos constantes elásticas como por ejemplo las constantes de Lamé ( $\lambda$  y  $\mu$ ) siendo este último en notación ingenieril el módulo de cizalla  $G$ . Las velocidades de onda sísmica pueden ser expresadas mediante notaciones simples entre tales constantes ( $\lambda$ ,  $G$ ) la densidad del material ( $\rho$ ) (Telford *et al* 1996, Parasnis 1997, Foti *et al* 2015)

$$\begin{aligned} v_P &= \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \\ v_S &= \sqrt{\frac{G}{\rho}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

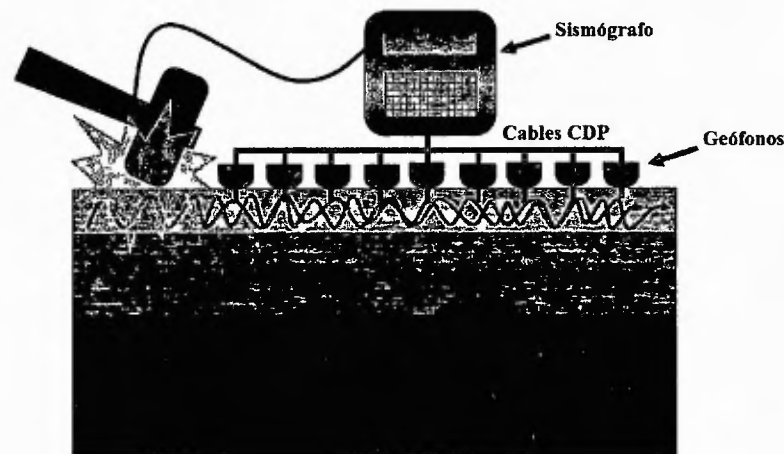
Seguendo a Foti *et al* (2015) la velocidad de propagación de las ondas internas se encuentra directamente ligada a la rigidez del medio y no depende frecuentemente de los materiales elásticos lineales. En particular la velocidad de propagación de la onda  $P$  se encuentra asociada con el módulo longitudinal (para una tensión pequeña) mientras que la velocidad de propagación de la onda  $S$  se asocia con el módulo de cizalla (para una tensión pequeña). En el fondo el conjunto de ecuaciones (4.1) constituye la base para el uso de las ondas sísmicas en la caracterización de los geomateriales demostrándose entonces que las constantes elásticas pueden determinarse con facilidad si las velocidades de las ondas

sísmicas se miden experimentalmente

#### **4.2 Análisis de las ondas $P$ y $S$ en estudios geotécnicos**

La caracterización de los mantos rocosos y otras formaciones geológicas es un tema que ha sido abordado por las técnicas geofísicas sobre todo en investigaciones recientes relacionadas a la prospección sísmica (Sass 2007 Hiltunen y Cramer 2008 Abd El Aal y Mohamed 2009 Palmer 2009 Chii y Osazuwa 2010 Al Saigh y Al Dabbagh 2010). Dicha técnica se basa en el estudio de la diferencia de las propiedades elásticas de los materiales superficiales como por ejemplo los sedimentos no perturbados subyacente o en el manto rocoso. En cada uno de estos materiales geológicos estas velocidades que experimentan las ondas sísmicas son diferentes (Abramson *et al* 2002). Además de delimitar los diferentes estratos geológicos los estudios de refracción también pueden proporcionar importante información para la construcción la firmeza del suelo y el factor de movimiento de tierras (Stephens 1978).

Dentro de la prospección sísmica existe una clasificación que depende del tipo de fuente la activa que utiliza fuentes de tipo martillo o explosivos para generar un tren de ondas en un rango de longitudes de onda que puede ser bajo (para las ondas  $P$ ) y elevado (para las ondas  $S$ ) las cuales se discutirán en detalle en las siguientes sub secciones. La Figura 4.2 ilustra un sistema de adquisición en conjunto con una fuente activa (martillo) el conjunto de sensores y las formas de onda que se generan en diferentes medios estratificados.



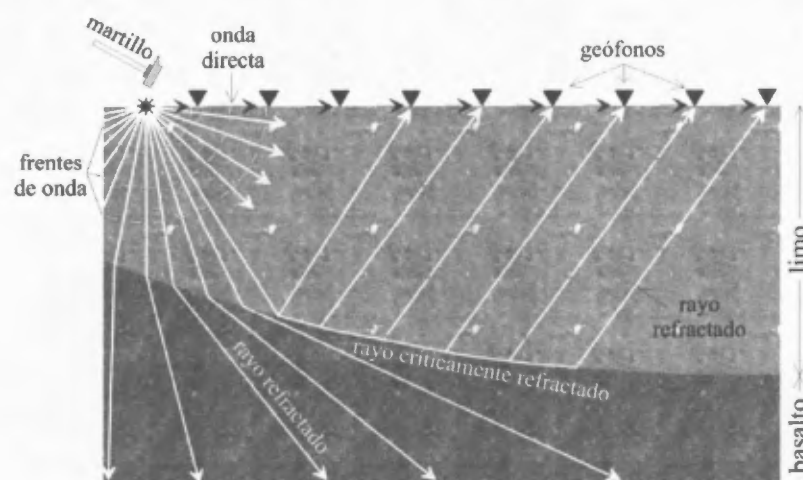
**Figura 4 2** Sistema de adquisición clásico utilizado para una prospección sísmica receptores o sensores equi espaciados fuente activa (martillo) y características de las formas de onda (longitudes de onda diferentes) en diferentes estratos

Por otro lado los métodos pasivos requieren el uso de fuentes sísmicas de tipo natural como por ejemplo el ruido provocado por el viento los ríos las mareas el tráfico vehicular o fuentes externas el tratamiento numérico de estas formas de onda características de las ondas Rayleigh permiten generar información referente a la onda de corte u onda  $S$

#### **4 2 1 Estudios de las ondas $P$**

Las ondas sísmicas primarias ondas de compresión u ondas  $P$  se caracterizan porque pueden viajar a través de los estratos del subsuelo a gran velocidad y más aun en las capas que se encuentran a mayor profundidad llegando a los sensores antes de aquellas ondas que toman la ruta directa Cuando esto ocurre la trayectoria de las ondas sísmicas generadas en la superficie (punto de fuente sísmica o shot point denotada a través de la sigla  $SP$ ) cambia al pasar por los límites entre las capas que generan diferentes velocidades a dicho

fenómeno se le conoce con el nombre de *refracción sísmica*. Esta técnica puede utilizarse para determinar el espesor de las diferentes capas del subsuelo que se encuentra por encima del manto rocoso a través de la medición de los tiempos de llegada de las ondas sísmicas a cada uno de los geófonos colocados en el terreno a una distancia igual entre cada uno de ellos. Para la generación de una tomografía, es necesario realizar diversas pruebas en posiciones diferentes, es decir, diferentes shot points o *SP* a lo largo del perfil. La Figura 4.3 presenta la trayectoria de este tipo de ondas en un suelo estratificado.

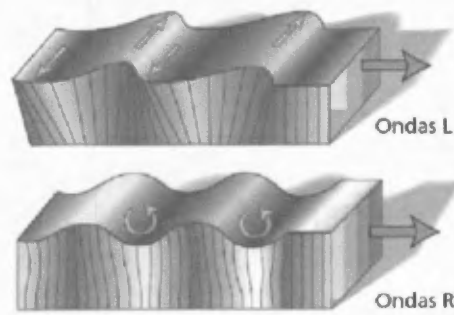


**Figura 4.3:** Representación generalizada de las trayectorias de las ondas *P* y sus respectivos frentes de onda a través de un medio estratificado; los triángulos invertidos representan los sensores (receptores) o geófonos.

#### 4.2.2. Análisis multicanal de ondas superficiales para inferir los valores de velocidad de onda *S*

Las ondas superficiales se generan cuando las ondas internas llegan a la superficie del terreno o en el caso de las fuentes extrenas en donde se generan en la superficie, propa-

gándose las mismas por la superficie de la discontinuidad de la interfase de la superficie terrestre (tierra-aire y tierra-agua). Estas son las causantes de los daños producidos por los sismos en las construcciones y poseen menor velocidad de propagación en comparación con las mencionadas con anterioridad. De estas ondas se pueden mencionar dos tipos: las ondas Rayleigh y ondas Love. Una característica importante de este tipo de ondas es que pueden cambiar de forma durante la propagación; otro punto importante es el hecho de que las mismas experimentan un fenómeno de dispersión, esto es que las diferentes componentes de las frecuencias que las constituyen se propagan a diferentes velocidades. Los patrones de dispersión son indicativos de la estructura de velocidad a través del cual viaja la onda (Mauro, 2011). Las ondas Rayleigh conocidas también con el nombre de Ground Roll, son las que generan un movimiento de tipo elíptico retrógrado del suelo. La existencia de estas ondas fue predicha por John William Strutt, Lord Rayleigh, en 1885. Como se mencionó con anterioridad, estas son ondas que viajan con mayor lentitud en relación a las ondas internas y su velocidad de propagación representa aproximadamente un 90 % de la velocidad de las ondas  $S$ . Las ondas Love, son las ondas superficiales que se propaga con mayor velocidad, caracterizándose las mismas por presentar un movimiento horizontal de cizalla, normal a la dirección de propagación. La Figura 4.4 presenta de forma gráfica la propagación de las mismas.



**Figura 4.4:** Representación gráfica de los dos tipos de ondas superficiales: ondas Love y Rayleigh. Fuente: [blog.educastur.es/eureka/10-bach-cmc/dinamica-terrestre/](http://blog.educastur.es/eureka/10-bach-cmc/dinamica-terrestre/).

#### 4.2.2.1. Naturaleza de las ondas Rayleigh y el fenómeno de la dispersión geométrica

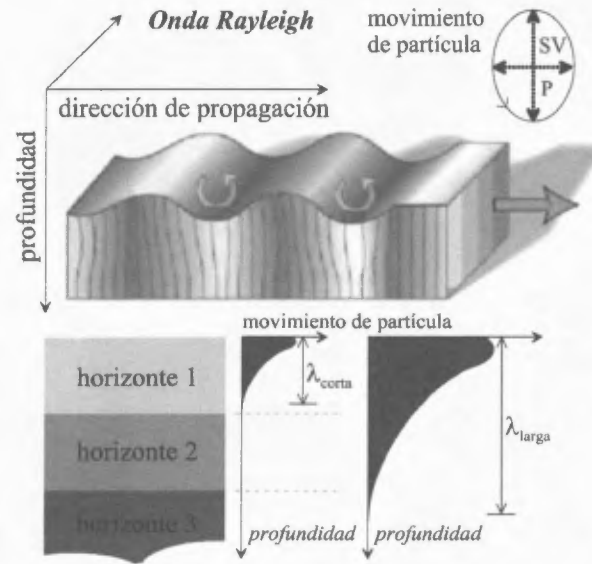
Estas ondas se desplazan con baja velocidad, baja frecuencia y gran amplitud. Como contienen componentes de cizalla, solo viajan a través de medios sólidos. Un punto importante a mencionar es el hecho de que este tipo de ondas se encuentran asociadas a movimientos telúricos o terremotos y a movimiento subterráneo del magma, pero también a cualquier otra fuente de energía sísmica, como por ejemplo las explosiones, los impactos de martillos en el suelo, el tráfico de vehículos, respuesta de la vegetación y estructuras civiles, al viento, mareas, etc., las cuales constituyen las vibraciones naturales que constantemente se propagan por el subsuelo de nuestro planeta.

Entre las características más importantes de las ondas Rayleigh se pueden mencionar: (1) se pueden transmitir por la superficie del terreno, aunque afectan a un rango de profundidad que es proporcional a su longitud de onda, (2) su velocidad de propagación, que se define como velocidad de fase, es determinada principalmente por la velocidad de onda



secundaria ( $v_S$ ) de los materiales, y (3) su amplitud vertical disminuye con la profundidad, y el movimiento de la partícula asociado a ellas es de tipo elipsoidal, con el eje mayor en disposición vertical y en el sentido de avance del frente de ondas.

Las ondas Rayleigh que se propagan en un medio homogéneo, isotrópico y elástico lineal no poseen característica dispersiva; esto quiere decir que la velocidad de propagación es una función de las propiedades mecánicas del medio pero no depende de la frecuencia. En un medio heterogéneo vertical el fenómeno de la dispersión geométrica se da lugar, el cual resulta en que la velocidad de fase de las ondas Rayleigh depende de la frecuencia. La naturaleza dispersiva de este tipo de ondas que se propagan en medios heterogéneos verticales constituye la base de las pruebas de las ondas superficiales (Foti *et al.*, 2015). Asumir un carácter dispersivo para las ondas superficiales quiere decir también que en el fondo son grupos de ondas en los que viajan diferentes fases, cada una con diferente velocidad de propagación ( $v_{fase}$ ), longitud de onda y grado de penetración (Muñoz Martín y Gorosabel, 2006).



**Figura 4.5:** Modo de propagación de las ondas Rayleigh y su carácter dispersivo, (Muñoz Martín y Gorosabel, (2006).

Por lo general, las fases más largas son las más rápidas y las que más penetran en el subsuelo; en el dominio de las ondas superficiales, las Rayleigh corresponden a ondas sísmicas plano-polarizadas de forma vertical con una vibración de partícula elíptica y retrógrada (ver Figura 4.5).

#### 4.2.2.2. Inversión de las curvas de dispersión $v_{fase}$ vs frecuencia

El proceso de generar curvas de dispersión a partir de datos de campo (gráfico de distancia en función del tiempo) puede ser realizada a través de 2 procesos de transformación: el primero de ellos (McMechan y Yedlin, 1981) es conocido con el nombre de transformación

de ondas de campo. En el mismo se realiza un análisis de sesgado y los datos son tratados desde la óptica de Fourier. La manera en que la Transformada de Fourier cambia el conjunto de datos  $x$  vs  $t$  a  $x$  vs  $\nu$  muestra por qué la velocidad de fase ( $v_{fase}$ ) es el parámetro que domina en la teoría de inversión de las ondas de superficie. La velocidad de fase corresponde a la velocidad de cada onda a una frecuencia dada. El segundo proceso corresponde a la transformación modificada de ondas de campo (Park *et al.* 1998). De acuerdo a esta metodología, el proceso se da lugar en primer lugar mediante una Transformada de Fourier antes del análisis de sesgado, en el cual los datos  $x$  vs  $t$  (en donde  $x$  corresponden a la distancia o posición de los geófonos y  $t$  el tiempo) son transformados a valores de lentitud vs el espacio. tiempo. En este, un desplazamiento lineal es aplicado a los datos de campo. Para cada línea en un gráfico sísmico, los mismos podrían desplazarse de tal forma que se obtendría una línea horizontal. Las distancias son integradas para cada lentitud y tiempo de composición.

En este último aspecto, la transformada de Fourier se aplica a los datos crudos correspondientes a las ondas superficiales graficados como  $x$  vs  $t$ .  $u(x, t)$  representa el total de las fuentes de onda acumuladas y la Transformación de Fourier en  $\mathcal{U}(x, \nu)$

$$\mathcal{U}(x, \nu) = \int u(x, t) e^{-i\nu t} dt \quad (4.2)$$

En esta ecuación  $\mathcal{U}(x, \nu)$  es sometida a un proceso de deconvolución y la respuesta puede ser expresada en términos de la fase y la amplitud. Es decir que

$$\mathfrak{U}(x, \nu) = \mathfrak{T}(x, \nu)\mathfrak{B}(x, \nu) \quad (4.3)$$

donde  $\mathfrak{T}(x, \nu)$  es la porción de la fase de la ecuación que contiene información ligada a las propiedades dispersivas de la onda, incluyendo el tiempo de llegada y  $\mathfrak{B}(x, \nu)$  corresponde a la porción de la amplitud que contiene los datos pertenecientes a las propiedades de atenuación y divergencia esférica de la onda. La divergencia esférica da una idea de cuánto la onda se extiende, es la energía que necesita la onda para extenderse bajo la superficie. Como  $\mathfrak{T}(x, \nu)$  contiene la información de las propiedades de dispersión, entonces:

$$\mathfrak{U}(x, \nu) = e^{-i\theta x}\mathfrak{B}(x, \nu) \quad (4.4)$$

donde  $\theta = \frac{\nu}{c_\nu}$  y  $c_\nu$  corresponde a la velocidad de fase a una frecuencia  $\nu$ . Estos datos pueden por ende ser transformados a una velocidad dada como una función de la frecuencia, es decir:

$$\mathfrak{L}(x, \theta) = \int e^{-i\theta x} \frac{U(x, \nu)}{|U(x, \nu)|} dx \quad (4.5)$$

Esta operación permite generar una curva de dispersión que revela una variedad de frecuencias que viajan a diferentes velocidades de fase. El proceso de inversión de la onda de superficie es el acto de inferir propiedades elásticas tales como la densidad, el perfil de velocidad de la onda de cizalla u onda  $S$  y el grosor de las curvas de dispersión creados. Existe una variedad de algoritmos que han sido empleados para llevar a cabo la inversión como por ejemplo, el método de computación de dispersión de multicapas, el ajuste por

mínimos cuadrados, el método de Knopoff, la inversión de onda de Rayleigh de alta frecuencia y el método de refracción de microtemores.

Uno de los más utilizados es el segundo, y se fundamenta en las investigaciones de Haskell (1953). Este método emplea una técnica iterativa que permite al usuario introducir parámetros importantes de inversión con el objetivo de obtener el mejor ajuste entre la curva teórica y las observaciones o datos de campo (Dorman y Ewing, 1962).

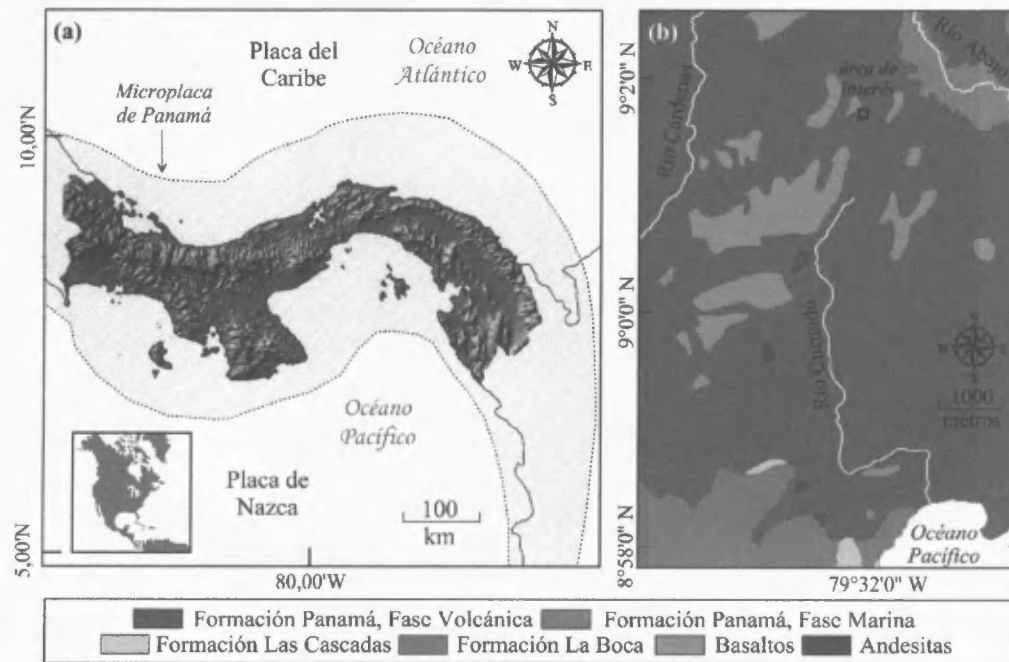
#### **4.3. Presentación de un caso: los suelos saprolíticos del Campus Universitario Dr. Victor Levi Sasso, Universidad Tecnológica de Panamá**

Todo el contexto teórico relacionado con la representación hilbertiana de una señal sísmica puede ser aplicado al estudio de las ondas  $P$  y  $S$  con el objetivo de obtener mayor información geotécnica de un determinando lugar.

##### **4.3.1. Características generales del área de trabajo: localización, geología e información geotécnica disponible**

Para esto, se eligió un sitio ubicado en los terrenos del Campus Universitario Dr. Victor Levi Sasso (ver Figura 4.6(a)). Dicha zona se encuentra ubicada en la parte occidental de la ciudad de Panamá, con coordenadas geográficas  $9, 023^{\circ} N$  y  $79, 53^{\circ} W$ . Andrade y Lizondro (2008), y Tribaldos (2014) hacen mención de ciertas investigaciones geológicas desarrolladas en el sector Oeste del campus universitario de la UTP, las cuales revelan la existencia de elementos volcánico, característicos de la Formación Panamá (Fase Volcánica).

Estos elementos contienen rocas ígneas extrusivas como es el caso de los aglomerados andesíticos en una matriz tobásica de grano fino. La tonalidad blanquecina que poseen los cuerpos superficiales de agua se encuentra ligada a la alteración hidrotermal debido a la existencia de vetillas de cuarzo y a la caolinización.

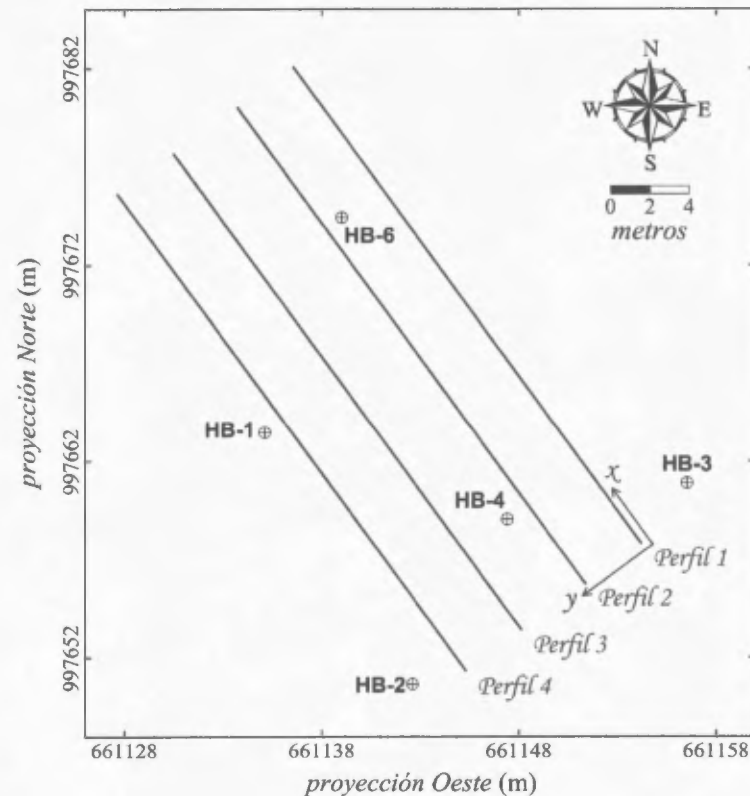


**Figura 4.6:** (a) Ubicación geográfica de la zona de interés y (b) mapa geológico generalizado del área bajo estudio y alrededores, fuente: Stewart *et al.*, (1980).

La geología del área de interés (Figura 4.6(b)) se encuentra dominada por la citada formación Panamá la cual tuvo sus orígenes en el período Oligoceno temprano, caracterizándose ella por presentar aglomerados que a su vez se conforman de grandes cuerpos de lava expulsados y luego embebidos en polvos y cenizas volcánica.

En el sitio fueron realizadas un total de 7 perforaciones (HB-1, HB-2, HB-3, HB-4, HB-5,

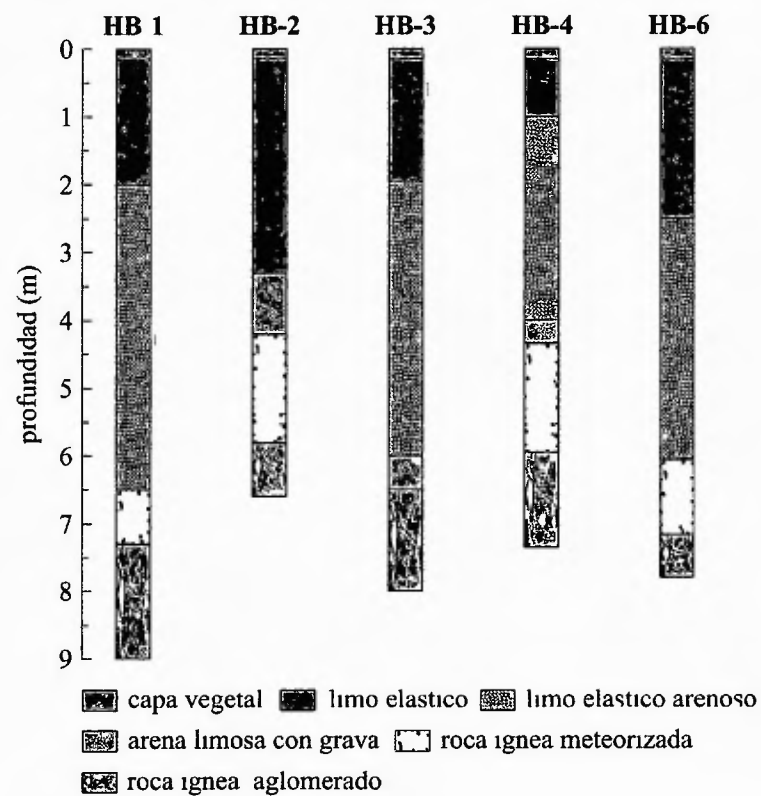
HB-6 y HB-7), de las cuales se consideraron para este trabajo un total de 5 debido a lo lejano del área de trabajo que dos de ellas se encontraban (HB-5 y HB-7); la profundidad de las perforaciones no superó los 9,0 m. Por su parte para la prospección sísmica se establecieron 4 perfiles paralelos de 30 m de longitud cada uno, todos ellos en dirección Sureste - Noroeste. La Figura 4.7 presenta la distribución espacial de estos perfiles y las perforaciones realizadas en el sitio.



**Figura 4.7:** Distribución de los 4 perfiles establecidos y perforaciones en el área de interés.

En todas las 5 perforaciones (etiquetadas como HB-1, HB-2, HB-3, HB-4 y HB-6) se pudo detectar una capa vegetal de 0,15 m de espesor, seguido de un limo elástico de alta plastici-

dad Luego se pudo identificar un limo elastico arenoso a partir de las perforaciones HB 1 HB3 HB 4 y HB6 en la perforacion HB 2 se identifico una arena limosa con grava A mayor profundidad se puede visualizar una roca ignea meteorizada de dureza muy suave (perforaciones HB 1 HB 2 y HB 6) la arena limosa con grava detectada en la perforación HB 2 aparece ahora en la HB 3 y HB 4 pero a mayor profundidad Finalmente se puede identificar en todas las perforaciones una roca ignea con un nivel de dureza moderado La Figura 4 8 muestra los resultados de estos 5 ensayos geotécnicos en el área de interes

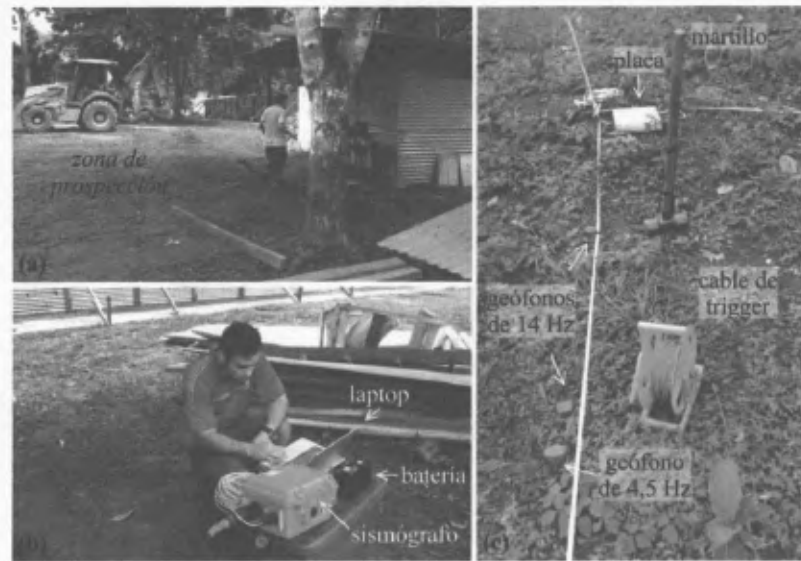


**Figura 4 8** Resultados de las perforaciones realizadas en el sitio de interes



#### 4.3.2. Metodología de investigación

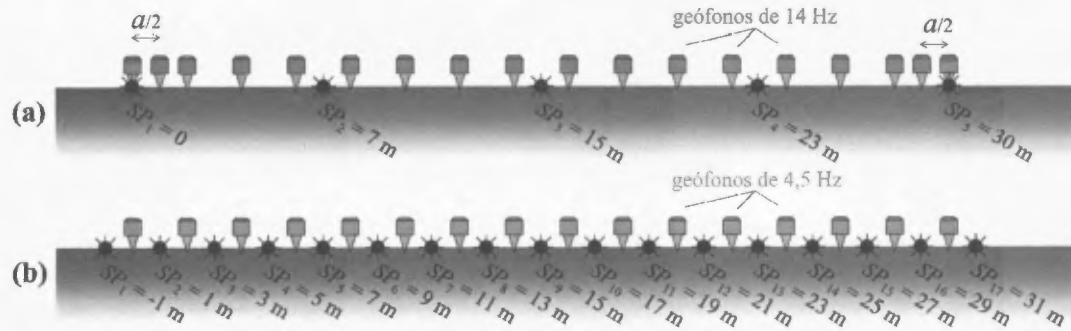
En cada uno de los 4 perfiles establecidos en el área de interés (ver Figura 4.7) se desplegaron un total de 16 geófonos de 14 Hz (para onda  $P$ ) y a un lado, 16 geófonos de 4,5 Hz (para onda  $S$ ), separados una distancia de 2 m entre ellos. Parte de la zona de interés se puede visualizar en la Figura 4.9(a). El dispositivo empleado para llevar a cabo los estudios sísmicos correspondió a un sismógrafo ES-3000 de Geometrics que alimentado a través de una batería de 12 V, se conecta a una computadora portátil para la adquisición de las señales sísmicas (ver Figura 4.9(b)); del sismógrafo se conecta además un sistema multicables que interconecta los 16 geófonos (de la misma frecuencia) y un cable que va a un disparador o trigger (ver Figura 4.9(c)). Este disparador va adherido a la parte metálica del martillo con el objetivo de establecer el tiempo  $t = 0$  tanto para el estudio de onda  $P$  como para onda  $S$ . Gracias a la utilización del programa Seismodule Controller de SeisImager fue posible llevar a cabo la adquisición de las formas de onda.



**Figura 4.9:** (a) Características generales de parte del área de interés, (b) accesorios utilizados en el estudio: sismógrafo tipo ES-3000 de Geometrics, batería de 12 V, laptop y multicable, (c) geófonos de 4,5 y 14 Hz, cable de trigger, placa y martillo.

En cada punto de impacto o Shot Point  $SP$ , fueron realizados un total de 3 golpes con el martillo con el objetivo de obtener una mejor señal (el proceso es acumulativo). Para el estudio de la onda  $P$ , el primer punto de impacto se ubicó en la posición 0 ( $SP_1 = 0$ ) y el geófono 1 se colocó en la posición 1 m; el resto de los geófonos se distribuyeron a lo largo del perfil a cada 2 m entre ellos, ocupando el último geófono la posición 30 m. Para el segundo, tercer y cuarto punto de impacto ( $SP_2 = 7$  m;  $SP_3 = 15$  m y  $SP_4 = 23$  m), el primer geófono se reubicó en la posición 0 y el resto de ellos conservaron la misma posición. Para el último punto de impacto, el último geófono fue reubicado en la posición 29 m quedando la posición 30 m el punto en donde se desarrollarían los 3 golpes ( $SP_5 = 30$  m). La Figura 4.10(a) muestra la distribución de los geófonos de 14 Hz en color azul y los puntos de impacto en forma de estrella. Estas operaciones fueron definidas para todos los

perfiles establecidos en el sitio de interés. Cada punto de impacto se encuentra ligado a un archivo que contiene las formas de onda de los 16 geófonos de onda  $P$ ; estas formas de onda (representación de Hilbert) son posteriormente tratadas mediante la aplicación de un filtro de paso bajo con el objetivo de atenuar la contribución del ruido sobre la señal sísmica.



**Figura 4.10:** Distribución de los geófonos y puntos de impacto o shot points para estudios de onda (a)  $P$  y (b)  $S$ .

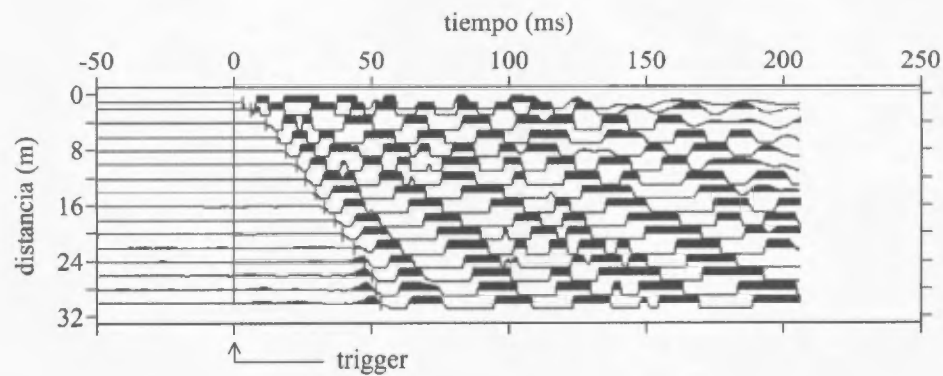
Para los estudios de onda  $S$ , el número de puntos de impacto se incrementan tal como lo muestra la Figura 4.10(b). En esta fase de la experiencia, los geófonos se colocaron cada 2 m ubicándose el primero en la posición 0 y el último en la posición 30 m. Un total de 17 puntos de impacto fueron establecidos a lo largo del perfil (Figura 4.10(b)). Todas estas operaciones se repiten a lo largo de cada uno de los perfiles establecidos en el área de estudio (Figura 4.7). Cada grupo de datos obtenidos mediante ambas técnicas fueron sometidas a tratamientos numéricos diferentes, empleando programas especializados referentes a: 1) la indentificación de los tiempos de llegada a cada geófono de las ondas  $P$  y la resolución del problema inverso empleando la técnica time-term inversion; todo esto para el análisis concerniente a la refracción sísmica y 2) la representación de las velocidades de fase de las

ondas Rayleigh en función de su frecuencia para posteriormente transformarlas en curvas de dispersión para su posterior inversión. Todos los conjuntos de datos de velocidad de onda  $P$  y  $S$  calculados fueron interpolados para posteriormente calcular la razón  $v_P/v_S$  y el coeficiente de Poisson para luego representarlos en un espacio tridimensional y correlacionados con la información estratigráfica del área de estudio. A continuación se presentarán los resultados obtenidos a partir de la interpretación cuantitativa de los datos procesados.

#### **4.4. Resultados experimentales obtenidos en el estudio**

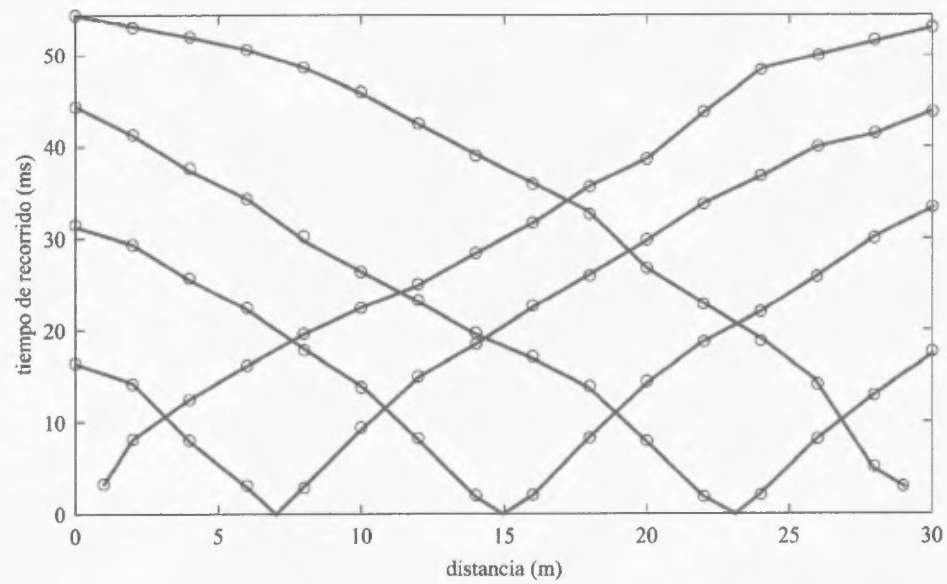
##### **4.4.1. Los estudios de onda de compresión - onda $P$**

Las formas de onda obtenidas a partir de cada uno de los 5 puntos de impacto a lo largo de cada perfil sísmico fueron sometidas a un proceso de filtrado paso-bajo para posteriormente identificar los tiempos de llegada a cada geófono. El proceso se llevó a cabo empleando el programa Pickwin de SeisImager2D. Como ejemplo de esto, la Figura 4.11 presenta las formas de onda del primer punto de impacto ( $SP_1 = 0$ ).



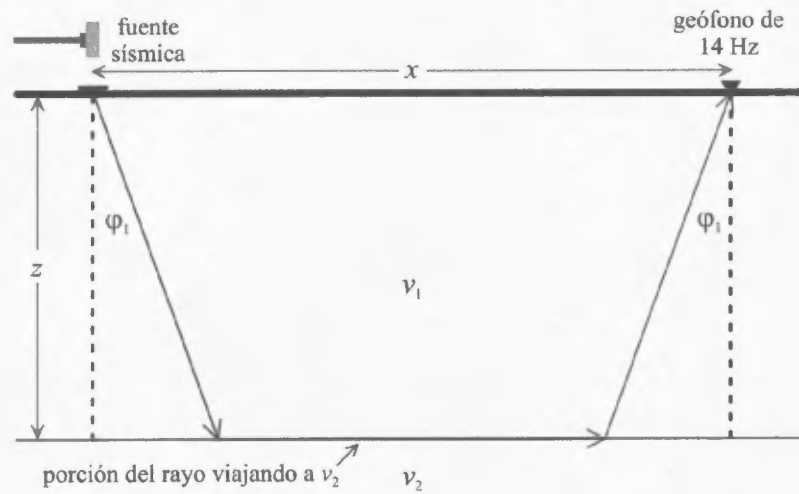
**Figura 4.11:** Formas de onda del primer punto de impacto ( $SP_1 = 0$ ) en el Perfil 1 e identificación de los tiempos de llegada de las ondas de compresión a cada sensor (ver línea roja vertical en cada forma de onda).

Todos los conjuntos de datos de campo u observaciones (tiempos de llegada) correspondientes a los 5 puntos de impacto desarrollados a lo largo de cada perfil, fueron representados en un gráfico de tiempo (en ms) vs posición a lo largo del perfil (en m), que en inglés corresponde al travelttime del eje vertical (ver Figura 4.12). En el programa de interpretación empleado (Plotrefa de SeisImager2D), se asignó un total de 3 capas y se utilizó el método de tiempo de duración (time-term inversion) para llevar a cabo la inversión.



**Figura 4.12:** Gráficos o dromocronas de tiempo (traveltime) en función de la distancia (directo y reverso) para los 5 puntos de impactos ejecutados en el Perfil 1.

El método de tiempo de duración (time-term method) es una aproximación que se emplea para determinar la mejor solución del modelo de capas discreto. La estructura matemática que caracteriza esta técnica es simple. Veamos la Figura 4.13; en ella se observa la posición de la fuente sísmica y el receptor separados una distancia  $x$ , el subsuelo se divide en 2 capas de velocidades de onda de compresión  $v_1$  y  $v_2$ ; el espesor de la primera capa es  $z$ .



**Figura 4.13:** Representación gráfica de la fuente sísmica, un receptor y el suelo estratificado (dos capas de diferentes velocidades de onda  $P$ ) con un primer estrato de espesor  $z$ .

Podemos definir un nuevo parámetro conocido con el nombre de lentitud y representado por  $S$ , como el inverso de la velocidad:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{v_1} \\ S_2 &= \frac{1}{v_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

A partir de la Ley de Snell y considerando el ángulo crítico igual a  $90^\circ$ , se tiene que:

$$\text{sen}(\varphi_1) = \frac{S_2}{S_1}$$

De acuerdo a la Figura 4.13, el tiempo total de trayectoria  $t$  que toma la onda desde la fuente hasta el receptor está dado por:

$$t = 2S_1 \cos(\varphi_1)z + xS_2 \quad (4.7)$$

Ahora, si definimos como  $c = 2S_1 \cos(\varphi_1)$ , entonces la ecuación anterior puede ser expresada como  $t = 2cz + xS_2$ , en donde  $z$  y  $S_2$  corresponden a valores desconocidos. El ejemplo dado con anterioridad asume que el refractor es paralelo a la superficie del área de interés, pero si expandimos esto a un caso más generalizado (no paralelo), como lo muestra la Figura 4.14, tendremos finalmente 3 valores desconocidos en vez de dos:  $z_1$ ,  $z_2$  y  $S_2$ .

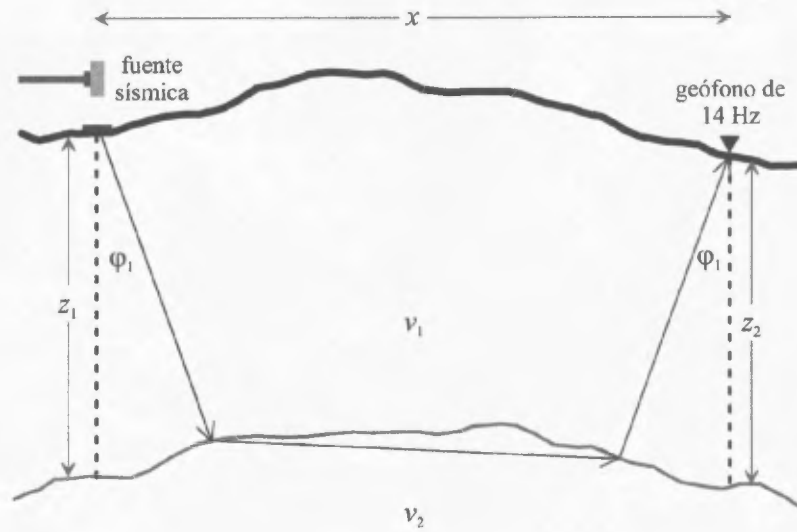
En este caso se tiene entonces que:

$$t = cz_1 + cz_2 + xS_2$$

que escrito de forma generalizada, la misma se puede expresar como:

$$t_j = \sum_{k=1}^n c_{ij} z_k + x_j S_2 \quad (4.8)$$





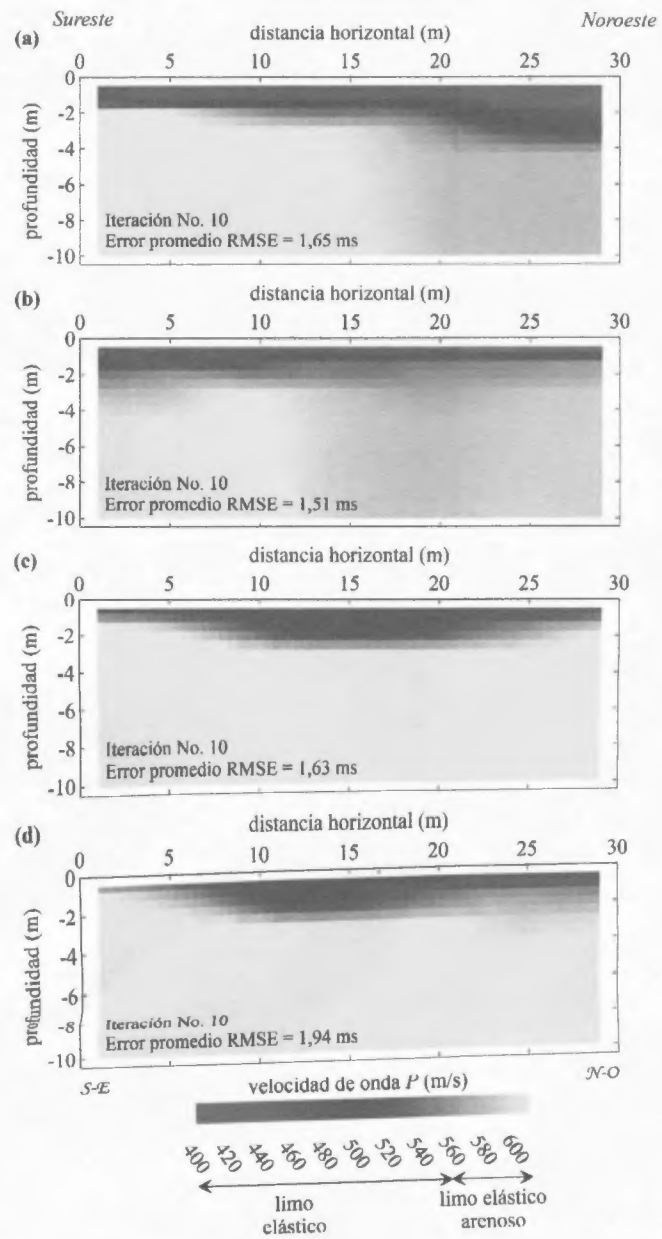
**Figura 4.14:** Representación gráfica de la fuente sísmica, un receptor y el suelo estratificado (dos capas de diferentes velocidades de onda  $P$ ) considerando un estrato superficial de espesor variable.

En forma matricial, esta expresión tendrá la siguiente estructura matemática:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & x_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & x_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} & x_3 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & \dots & c_{4n} & x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mn} & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ S_2 \end{bmatrix}$$

donde  $m$  corresponde al número de tiempos de trayectoria, y  $n$  es el número de receptores (profundidades a calcularse). Es posible entonces resolver la matriz para  $z_1$ ,  $z_2$  y  $S_2$  (SeisImager/2D, 2009). Esta técnica fue aplicada para cada uno de los 4 perfiles obtenidos en este estudio. La Figura 4.15 presenta los resultados de las tomografías de refracción sísmica

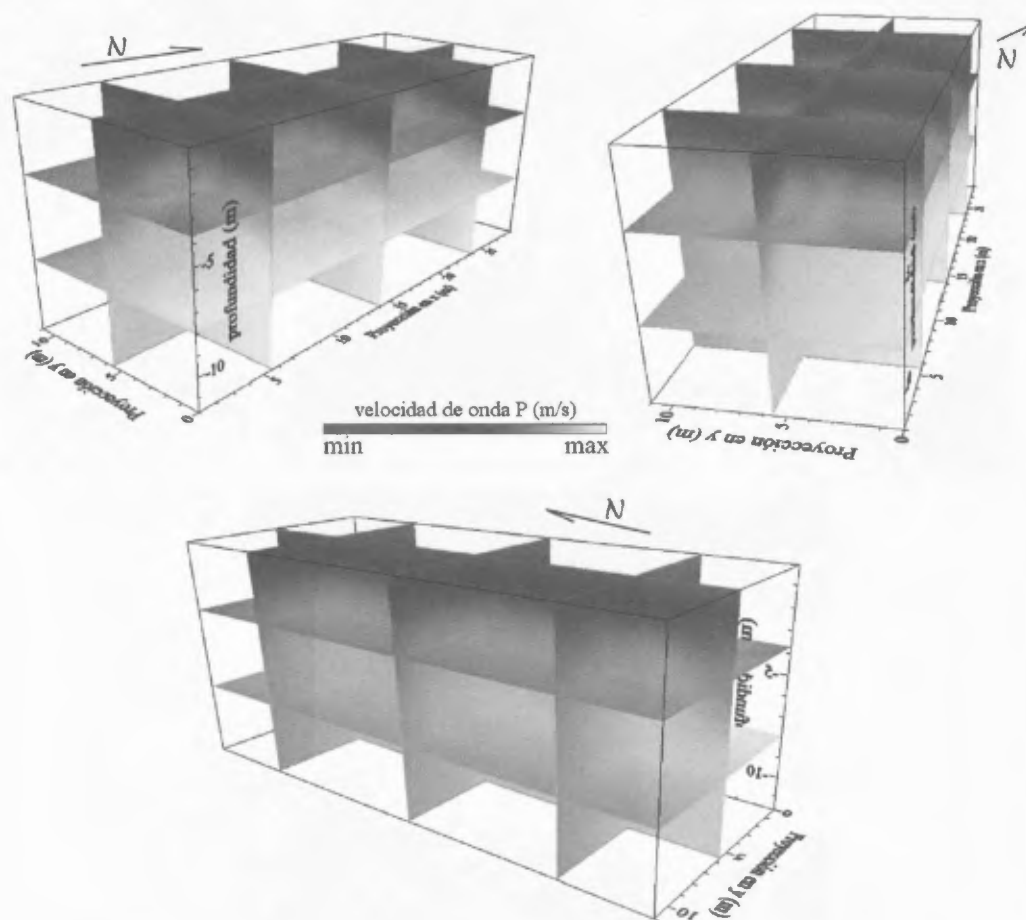
obtenidos en el área de interés.



**Figura 4.15:** Tomografía de refracción sísmica obtenida en el Perfil (a) 1, (b) 2, (c) 3 y (d) 4, mostrándo cada una de ellas el número total de interacciones y el error promedio obtenido una vez resuelto el problema inverso.

En cada uno de estos resultados es posible identificar solamente 2 horizontes: el primero (superficial) en tonalidades verde claro a café oscuro, caracterizado por presentar un rango de velocidad de onda  $P$  que oscila entre 400 y 560 m/s, el cual se encuentra asociado con limo elástico de alta plasticidad de acuerdo con el reporte de las perforaciones desarrolladas en el sitio. En el Perfil 1 (Figura 4.15(a)), dicho horizonte posee un espesor que varía entre aproximadamente 2,0 y 3,5 m. En la Figura 4.15(b) - Perfil 2 - el espesor oscila entre 1,5 y 3,0 m aproximadamente, mientras que para la Figura 4.15(c) - Perfil 3 - entre 1,0 y 2,5 m aproximadamente y para el Perfil 4 (Figura 4.15(d)), entre 0 y 2,5 m. Con respecto al segundo horizonte, podemos observar que el mismo se encuentra caracterizado por presentar tonalidades en café claro, con valores de velocidad de onda  $P$  que se extienden entre 560 y 600 m/s; dicho horizonte se encuentra asociado con un limo elástico arenoso de alta plasticidad.

Los valores de velocidad de onda  $P$  calculados pueden ser desplegados tridimensionalmente con el objetivo de visualizar tanto lateralmente como en profundidad, las variaciones espaciales de este parámetro elástico. La Figura 4.16 presenta 3 orientaciones diferentes de esta representación 3D la cual se caracteriza por presentar tonalidades diferentes en relación a las presentadas de forma individual. En todos estos resultados fue posible identificar los 2 primeros estratos, hecho que demuestra una limitación del método si se desea explorar a mayores profundidades.

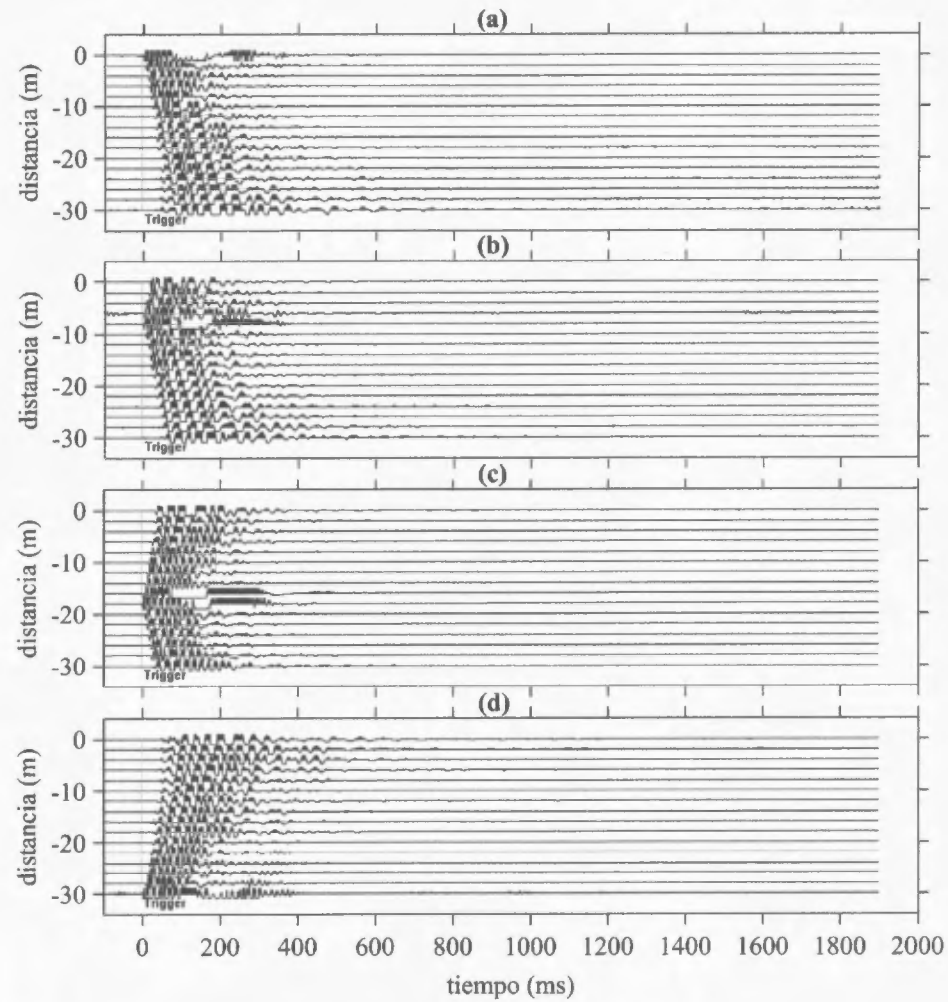


**Figura 4.16:** Diferentes proyecciones 3D sobre la distribución espacial de los valores de velocidad de onda  $P$  calculados en el sitio de interés.

#### 4.4.2. Los estudios de onda de corte - onda $S$

En cada perfil se generaron un total de 17 archivos como producto de los 17 puntos de impacto desarrollados a lo largo del mismo, con 16 formas de onda en cada una, lo que hace un total de 1088 formas de onda. La Figura 4.17 presenta un ejemplo de las formas de

onda obtenidos en el Perfil 2.



**Figura 4.17:** Ejemplo de las formas de onda  $S$  obtenidas en el Perfil 2 para los puntos de impacto o shot points establecidos en las posiciones (a) -1 m, (b) 7 m, (c) 17 m y (d) 31 m.

Si bien es cierto que la utilización del Análisis Multicanal de Ondas Superficiales (MASW por sus siglas en inglés) ofrece: (i) información valiosa a la ingeniería estructural o geotécnica, (ii) la evaluación de la amenaza sísmica de una región y (iii) la amplificación de sitio

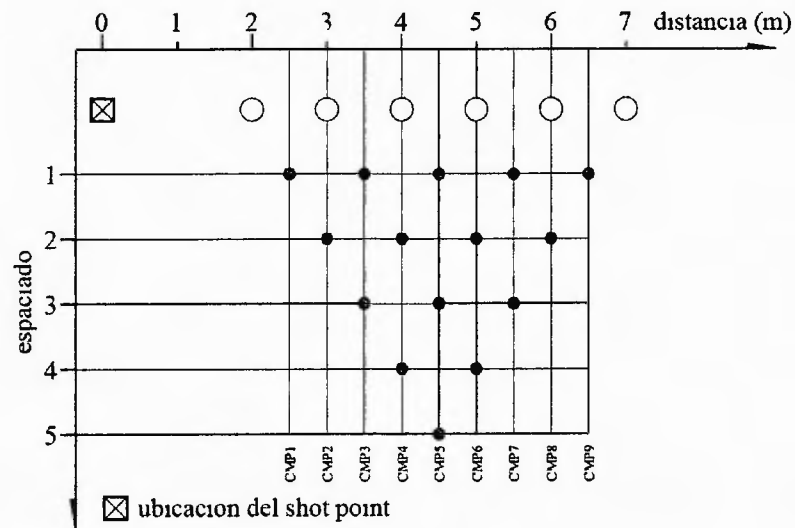
para la elaboración de mapas de riesgo sísmico, su uso convencional es principalmente utilizado para obtener información de la onda  $S$  y la profundidad de los estratos en una sola dimensión, sin tomar en cuenta las variaciones laterales. Con el objetivo de obtener imágenes de alta resolución sobre las variaciones de la velocidad de onda  $S$  tanto en profundidad como lateral, el número de puntos de impacto o shot points puede ser incrementado a lo largo del perfil (como se mencionó con anterioridad); el método empleado para tomar en consideración toda la información obtenida a lo largo de un perfil es el de Correlación Cruzada del Punto Medio Común (CMPCC: Common-Mid-Point Cross Correlation) el cual fue propuesto por Hayashi *et al.*, (2004) y utilizado en este trabajo. Este método consta de 5 pasos:

(a) la adquisición de los datos la cual ha sido descrita en la sección anterior.

(b) la generación de una correlación cruzada unida; para este paso suponemos que se tienen dos señales sísmicas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  registradas en dos geófonos para un punto de impacto en común, entonces la correlación cruzada  $\gamma_{12}(\tau)$  de las dos trazas puede ser determinado a partir de la ecuación:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{(t_{max} - \tau)} \int_{t=\tau}^{t_{max}} x_1(t - \tau)x_2(t)dt \quad (4.9)$$

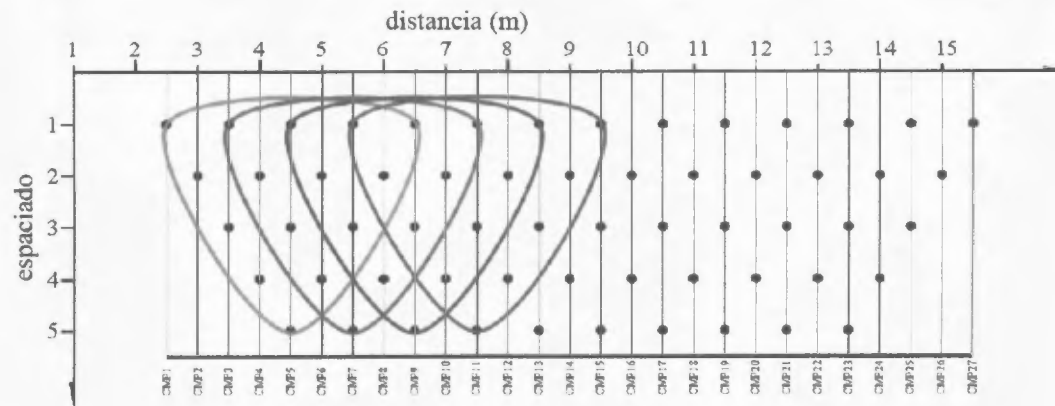
Para cada disparo en conjunto, las correlaciones cruzadas pueden ser calculadas para cada par de trazas (Jiani *et al.*, 2013). Por ejemplo si se tienen 6 trazas para un solo shot point, se obtendrán entonces 15 correlaciones cruzadas tal como lo muestra la Figura 4.18.



**Figura 4 18** Ejemplo correlaciones cruzadas para un primer shot point en el análisis multicanal de ondas superficiales 2D (Jiani *et al* 2013)

(c) Stack Luego de determinar las correlaciones cruzadas para cada conjunto de impactos las correlaciones cruzadas que poseen la misma ubicacion CMP se agrupan en conjunto y las correlaciones cruzadas en el grupo que tienen igual espacio se enlazan en el dominio temporal para estas correlaciones cruzadas que tienen espacios diferentes no se pueden enlazar tal como lo muestra la Figura 4 19

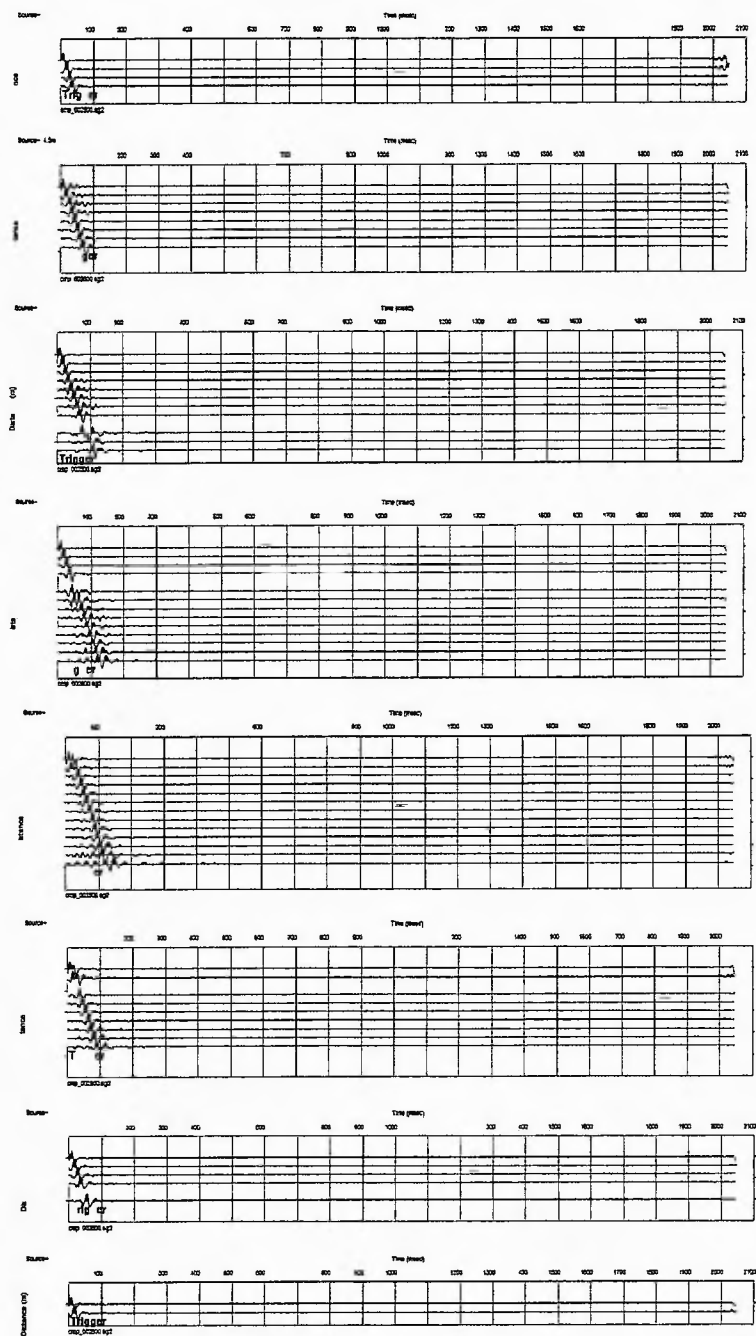




**Figura 4.19:** Correlaciones cruzadas para 10 shot points con un shot igual al intervalo (Jiani *et al.*, 2013).

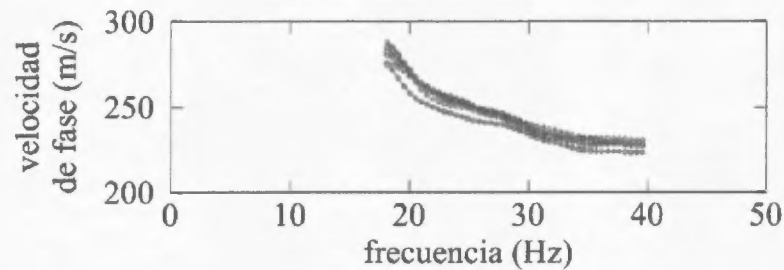
(d) Generación del CMP unido: Posterior al stacking, las correlaciones cruzadas de cada grupo en la misma ubicación CMP se ordenan con respecto a su espacio. Las correlaciones cruzadas ordenadas en cada ubicación CMP son nombradas CMP unidas y contienen solamente las características de las diferencias de fase. En la Figura 4.20 se aprecian las correlaciones cruzadas por grupos CMP unidos para el Perfil 3.

(e) Aplicación del método MASW: finalmente se aplica el método MASW al CMP unido para determinar las velocidades de fase para cada ubicación CMP.



**Figura 4 20** Ejemplo de correlaciones cruzadas para los grupos CMP del Perfil 3

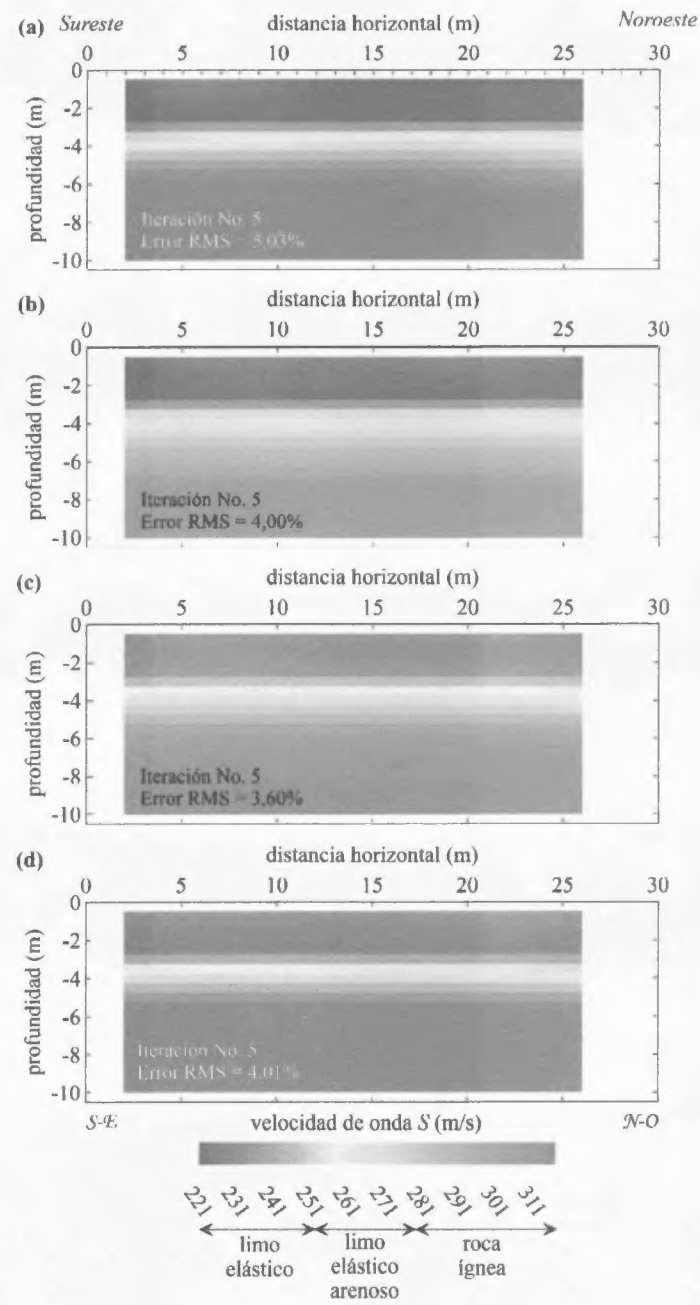
Cada conjunto de datos obtenido en cada perfil, fue sometido a estos procesos con el objetivo de obtener las curvas de dispersión para cada CMP en función de la frecuencia. En SeisImager de Geometrics fue posible obtener las mismas. Como ejemplo presentamos en la Figura 4.21 las curvas de dispersión obtenidas en el Perfil 3.



**Figura 4.21:** Curvas de dispersión, velocidad de fase de la onda Rayleigh en función de la frecuencia para el Perfil 3.

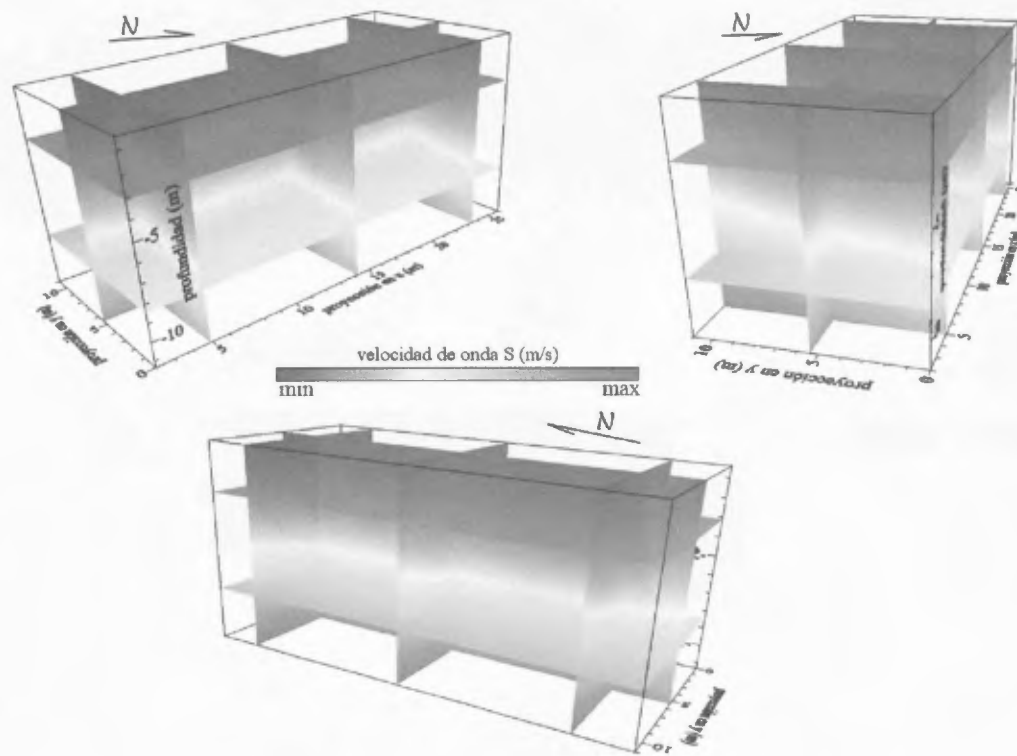
Las curvas son sometidas entonces a un proceso riguroso de inversión y finalmente se obtienen las tomografías de onda  $S$  para cada uno de los perfiles estudiados en este trabajo. La Figura 4.22 presenta las tomografías de onda  $S$  obtenidas una vez resuelto el problema inverso para cada perfil dado.

A diferencia de los resultados obtenidos en el análisis de onda  $P$ , en estos resultados se puede visualizar una gama un poco más amplia de tonalidades, con un rango no muy amplio de valores de onda  $S$  calculados (221 - 311 m/s). Las tonalidades en azul y celeste revelan un rango de valores de velocidad de onda  $S$  calculados que oscilan entre 221 y 251 m/s y que pueden estar asociados con el limo elástico de alta plasticidad el cual es característico del primer horizonte del área bajo estudio.



**Figura 4.22:** Tomografías de onda de corte u onda  $S$  para los perfiles (a) 1, (b) 2, (c) 3 y (d) 4.

Seguido se puede identificar un rango de velocidad de onda  $S$  calculadas que varía entre 251 y 281 m/s, y con tonalidades en celeste claro y amarillo claro el cual se asocia con el limo elástico arenoso, y finalmente el tercer horizonte caracterizado por presentar una tonalidad en rojo claro (281 - 311 m/s) el cual se asocia con la roca ígnea y aglomerados. Las variaciones en los espesores de estos horizontes en cada uno de los perfiles son muy débiles. Con el objetivo de visualizar tridimensionalmente la distribución espacial de los valores de velocidad de onda  $S$  calculados, la Figura 4.23 presenta 3 bloques 3D pero con orientaciones diferentes.



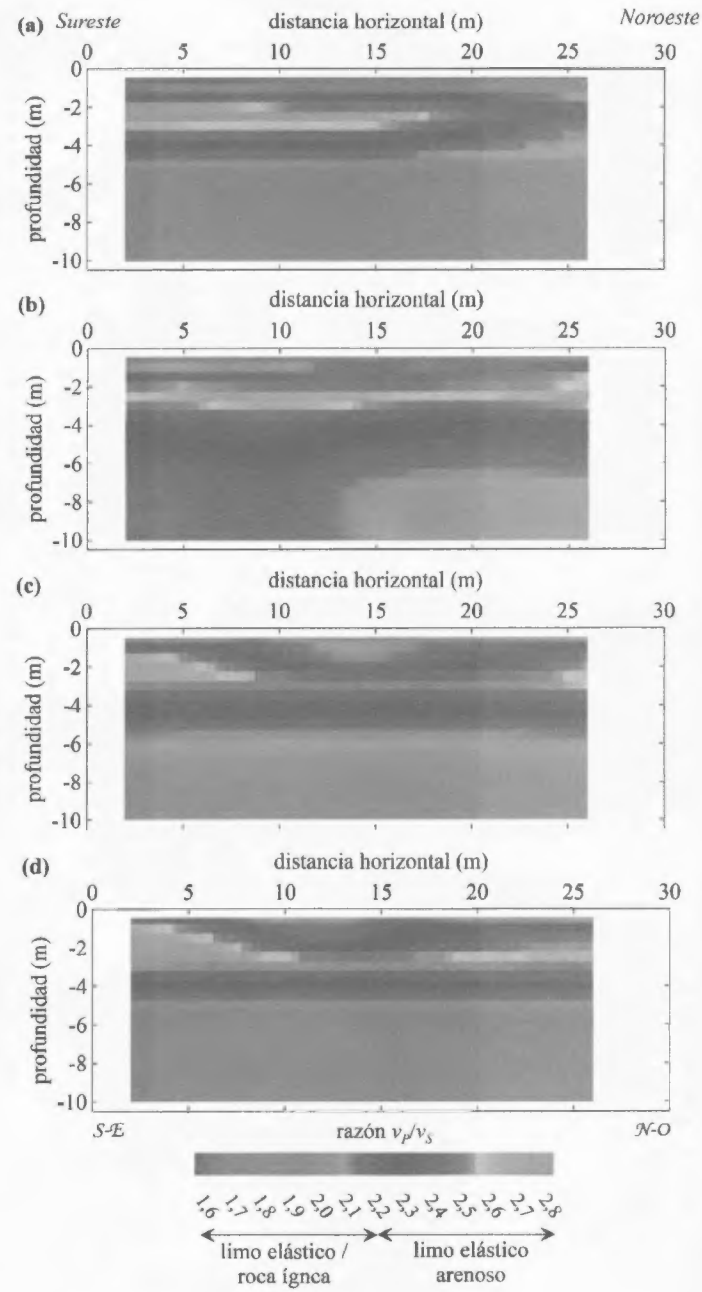
**Figura 4.23:** Diferentes proyecciones 3D sobre la distribución espacial de los valores de velocidad de onda  $S$  calculados en el sitio de interés.

#### 4.4.3. Estudio de la razón $v_P/v_S$ y coeficiente de Poisson

Existen muchos estudios geofísicos en donde se intenta caracterizar los estratos de un terreno dado y la zona saturada mediante el estudio de las ondas sísmicas de tipo  $P$  y  $S$  de forma independiente; no obstante la respuesta sísmica en presencia de dichas interfaces y más generalmente, en el contexto de la caracterización de la zona crítica de los sistemas acuíferos, permanece complejo. La interpretación de las velocidades calculadas es comúnmente delicada debido a su variabilidad que depende principalmente de las propiedades secas del medio poroso que la constituyen. Una manera de contrarrestar este tipo de obstáculos es a través de un estudio conjunto de las velocidades ( $v_P$  y  $v_S$ ). Desde un punto de vista teórico, esta aproximación parece apropiada para la caracterización de los estratos y zonas saturadas, particularmente gracias a la estimación de la razón  $v_P/v_S$  o del coeficiente de Poisson (Stumpel *et al.*, 1984 ; Castagna *et al.*, 1985 ; Bates *et al.*, 1992 ; Bachrach *et al.*, 2000). La estimación de la razón  $v_P/v_S$  con la técnica de refracción sísmica necesita una doble adquisición para obtener  $v_P$  y  $v_S$ . Si la medición de la  $v_P$  se ha llevado a cabo de forma eficaz después de varios años, la medición de  $v_S$  es mucho más compleja y delicada desde la perspectiva práctica. De hecho, las ondas  $S$  son generalmente más difíciles a identificar en los registros producidos (Valois, 2011).

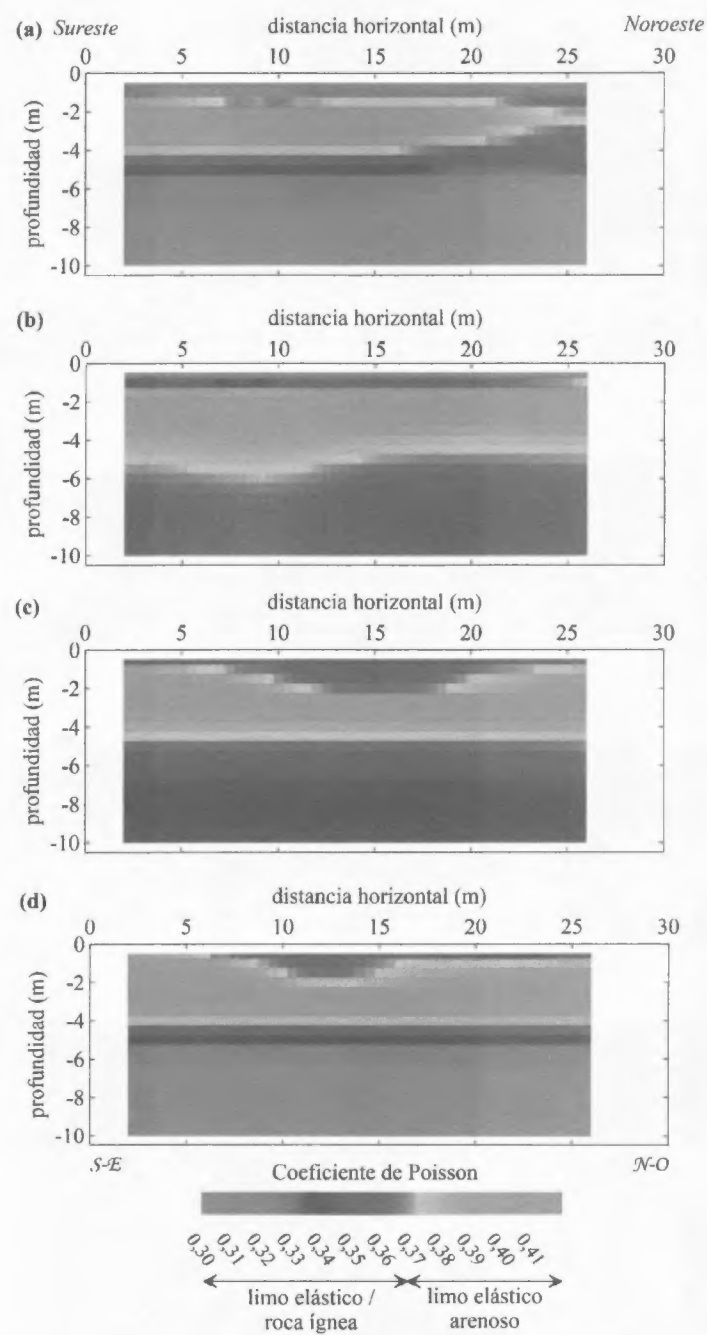
En esta fase de la investigación, los datos invertidos de  $v_P$  y  $v_S$  con las mismas posiciones a lo largo del perfil (eje  $x$ ) y en profundidad real se combinaron para obtener estos dos nuevos parámetros; para la razón  $v_P/v_S$ , los mismos fueron interpolados obteniéndose como resultado, los tomogramas de la Figura 4.24. En estos resultados experimentales, se pue-

de identificar un primer horizonte caracterizado en tonalidades violeta azul y celeste con valores de razón  $v_P/v_S$  que oscilan entre 1.6 y 2.2 este horizonte se encuentra asociado con el limo elastico caracteristico del sitio seguido de un segundo horizonte en tonalidades verde claro amarillo y naranja el cual presenta un rango de valores de  $v_P/v_S$  que oscilan entre 2.2 y 2.8 caracteristico del limo elastico arenoso y finalmente un tercer horizonte el cual posee las mismas características físicas que el horizonte superficial dicho horizonte parece asociarse a la presencia de roca ignea a una profundidad que varia aproximadamente entre 5 y 6 m



**Figura 4.24:** Tomografías de la razón  $v_P/v_S$  para los perfiles (a) 1, (b) 2, (c) 3 y (d) 4.





**Figura 4.25:** Tomografías del coeficiente de Poisson para los perfiles (a) 1, (b) 2, (c) 3 y (d) 4.

De igual forma el calculo del coeficiente de Poisson dado por la ecuacion matematica siguiente

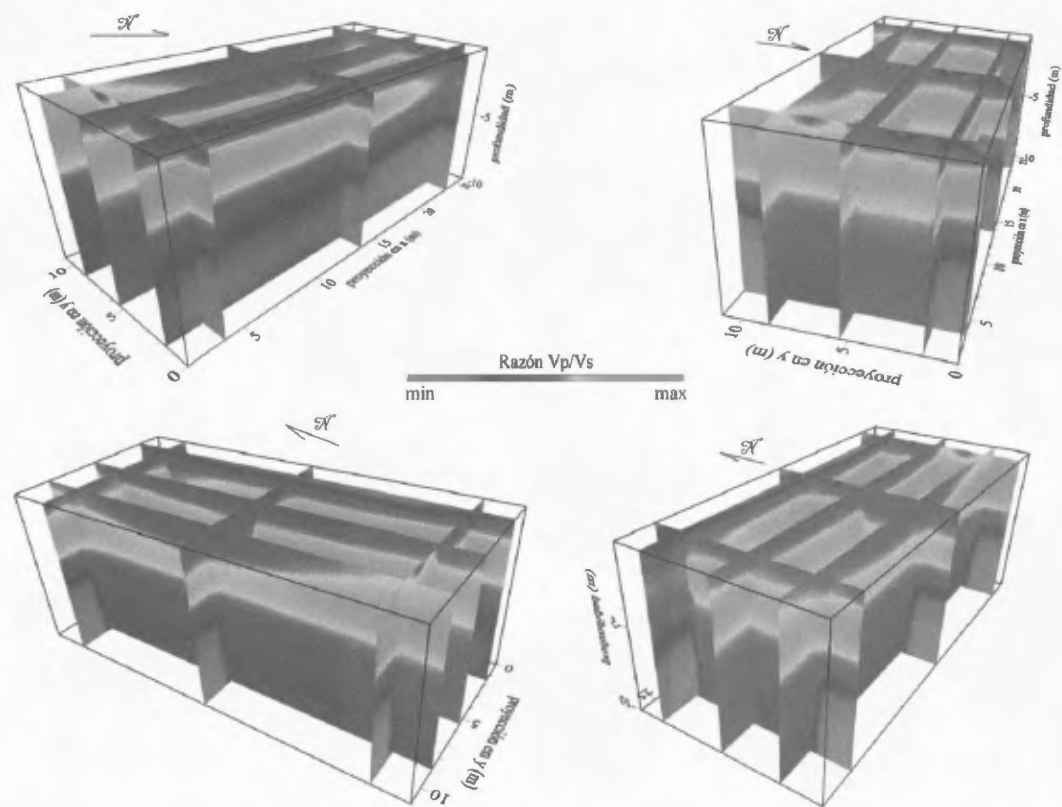
$$\sigma = \frac{\left(\frac{v_P}{v_S}\right)^2 - 2}{2\left(\left(\frac{v_P}{v_S}\right)^2 - 1\right)} \quad (4.10)$$

reveló las mismas características estando el primero horizonte caracterizado por presentar un rango de valores que se extiende entre los 0.30 y 0.37 (propio del limo elastico) seguido del segundo horizonte cuyo rango varia entre 0.37 y 0.41 (limo elastico arenoso) y finalmente el material igneo cuyo rango del coeficiente de Poisson parece extenderse entre 0.30 y 0.35 (ver la Figura 4.25). Estos valores parecen asociarse con los reportados por la literatura por ejemplo los reportados por Trautmann y Kulhawy (1987)

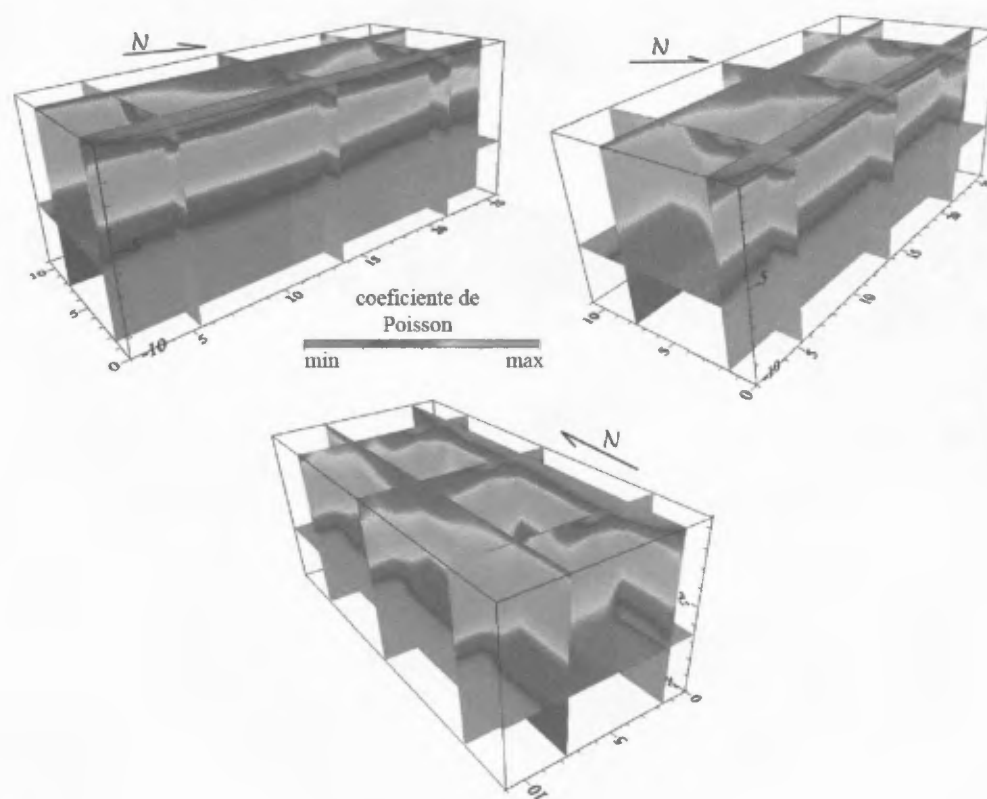
Tipo de suelo	Rango de Coeficiente de Poisson
Arena suelta	0.20 - 0.40
Arena media densa	0.25 - 0.40
Arena densa	0.30 - 0.45
Limo arenoso	0.20 - 0.40
Arena y grava	0.15 - 0.35

**Cuadro 4.1** Rango de valores del Coeficiente de Poisson ( $\sigma$ ) para algunos tipos de suelos (Trautmann y Kulhawy 1987)

Como en las representaciones 3D presentadas anteriormente sobre la distribución de las ondas  $v_P$  y  $v_S$  calculadas las Figura 4.26 y 4.27 presentan una serie de esquemas tridimensionales correspondientes a los valores de la razón  $v_P/v_S$  y el coeficiente de Poisson



**Figura 4.26:** Diferentes proyecciones 3D sobre la distribución espacial de los valores de la razón  $v_P/v_S$  en el sitio de interés.



**Figura 4.27:** Diferentes proyecciones 3D sobre la distribución espacial de los valores del coeficiente de Poisson en el sitio de interés.

## Conclusiones y Recomendaciones

Una vez culminado este trabajo de investigación se pueden enumerar las siguientes conclusiones

- La Transformada de Fourier puede ser aplicada al estudio de las ondas de corte mediante un análisis multicanal de ondas superficiales hecho que conlleva a una mejor comprensión de los suelos ya que la misma podría también brindar información referente a la clasificación de los suelos
- Las tomografías de refracción sísmica (estudios de las ondas de compresión) obtenidas en los diferentes perfiles no ofrecieron información acerca de la distribución en profundidad y lateral del estrato ígneo que caracteriza el sitio de estudio es posible que este resultado se encuentre relacionado con la fuente sísmica empleada. Por su parte los valores de onda de corte obtenidos a partir del análisis multicanal de ondas superficiales sí muestran mayor información en relación sobre los estratos si se compara con la prospección de refracción sísmica
- Los estudios de la razón  $v_P/v_S$  y el coeficiente de Poisson obtenidos a partir de las tomografías de refracción sísmica y análisis multicanal de ondas superficiales constituyen una poderosa herramienta en la parametrización de los diferentes estratos

que caracterizan un importante sector de la ciudad de Panamá

Como recomendación se remarcan los siguientes puntos

- Tomar en consideración los niveles de ruido que puedan ser provocados por factores externos a la hora de desarrollar una tomografía de refracción sísmica o un ensayo referente a análisis multicanal de ondas superficiales activo
- Utilizar fuentes sísmicas de considerable intensidad con la finalidad de obtener información en profundidad cuando se realizan estudios de onda  $P$
- Implementar esta técnica de prospección de onda  $P$  y  $S$  en otros ambientes geológicos y suelos saturados con el objetivo de analizar la respuesta referente a los valores de onda  $P$  calculados onda  $S$  calculados razón  $v_P/v_S$  el Coeficiente de Poisson y lentitud de onda para correlacionar esta última con la porosidad del suelo

## Bibliografía

- ABD, A.K. Y MOHAMED, A.A. 2009. Near - surface seismic refraction applied to exploring subsurface clay layer at a new mining area in southeast Cairo, Egypt. *Arabian Journal of Geosciences*, 3(2), 105 - 112.
- ABRAMSON, L.W.; LEE, T.S.; SHARMA, S. Y BOYCE, G.M. 2002. *Slope stability and stabilization methods*, John Wiley and Sons, Inc., 712 p.
- AKHIEZER, N.I. Y GLASMAN, I.M. 2013. *Theory of linear operators in Hilbert Space*, Dover Publications Inc., New York, 400 p.
- AL - SAIGH, N.H. Y AL - DABBAGH, TH.H. 2010. Identification of Landslide Slip - surface and its Shear Strength: A New Application for Shallow Seismic Refraction Method. *Journal Geological Society of India*, 76, 175 - 190.
- ANDRADE, W. Y LIZONDRO, T. 2008. *Aplicación de los métodos de prospección eléctrica y sísmica a la Ingeniería Civil: Caso del futuro edificio del CEI - Dr. Victor Levi Sasso*. Tesis de Licenciatura en Ingeniería Civil, UTP.
- ASTM DESIGNACIÓN D 5777 2006. *Standard Guide for Using the Seismic Refraction Method for Subsurface Investigation*.

- BACHRACH, R.; DVORKIN, J. Y NUR, A. 2000. Seismic velocities and Poisson's ratio of shallow unconsolidated sands. *Geophysics*, 65(2), 559 - 564.
- BATES, C.R.; PHILLIPS, D. Y HILD, J. 1992. *Studies in P - wave and S - wave seismics. En: Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems*. EEGS, Illinois, EEUU.
- CASTAGNA, J.P.; AMATO, M. Y EASTWOOD, R. 1985. Relationships between compressional - wave and shear - wave velocities in elastic silicate rocks. *Geophysics*, 50(4), 571 - 581.
- CHII, C.E. Y OSAZUWA, I.B. 2010. Seismic refraction tomography of the periphery of an artificial lake in the Precambrian basement complex of Northern Nigeria. *International Journal of the Physical Sciences*, 5(5), 421 - 431.
- DEBNATH, L Y MIKUSÍNSKI, P. 2005. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, Elsevier Academic Press, 600 p.
- DORMAN, J. Y EWING, M. 1962. Numerical Inversion of Seismic Surface Wave Dispersion Data and Crust - Mantle Structure in the New York - Pennsylvania Area. *Journal of Geophysical Research*, 16, 5227 - 5241.
- FOTI, S.; LAI, C.G.; RIX, G.J. Y STROBBIA, C. 2015. *Surface Wave Methods for Near-Surface Site Characterization*, Taylor & Francis Group, 467 p.
- HASKELL, N.A. 1953. Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 50, 87 - 115.



- HAYASHI, K. Y SUZUKI, H. 2004. CMP cross-correlation analysis of multi-channel surface wave data. *Exploration Geophysics*, 35, 7 - 13.
- HILTUNEN, D.R. Y CRAMER, J. 2008. Application of Seismic Refraction Tomography in Karst Terrane. *J. Geotech. and Geoenviron. Engrg.*, 134(7), 938 - 948.
- JIANQI, L.U.; SHANYOU, L.I. Y WEI, L.I. 2013. The CMP Cross-Correlation Method and its limitation. *Applied Mechanics and Materials*, vols 353 - 356, 2153 - 2158.
- ALABISO, C. Y WEISS, I. 2015. *A Primer on Hilbert Space Theory: Linear Spaces, Topological Spaces, Metric Spaces, Normed Spaces, and Topological Groups*, Springer, 255 p.
- MAURO, C.G. 2011. *Caracterización geofísica del suelo somero mediante la aplicación del método de refracción por microtemores (ReMi) en la ciudad de Maracay-Estado Aragua*, Tesis especial de grado, Universidad Central de Venezuela, 154 p.
- MAX, J. 1972. *Méthodes et Techniques de Traitement du Signal et Applications aux Mesures Physiques*, Masson, 331 p.
- MCMECHAN, G.A. Y YEDLIN, M.J. 1981. Analysis of dispersive waves by wave-field transformation. *Geophysics*, 46, 869 - 874.
- MUÑOZ MARTÍN, A. Y GOROSABEL, C. 2006. Resultados y experiencias de aplicación del método de refracción por Microtemor (Sísmica Pasiva) para la investigación geofísica de las nuevas líneas del metro de Madrid (España). *Geogaceta*, 40, 51 - 54.

- PALMER, D. 2009. Exploiting Lateral Resolution of Near - Surface Seismic Refraction Methods. *Journal of Earth Science*, 20(3), 526 - 545.
- PARASNIS, D.S. 1997. *Principles of Applied Geophysics*, Chapman & Hall, 429 p.
- PARK, C.B., XIA, J. Y MILLER, R.D. 1998. Imaging dispersion curves of surface waves on multichannel record: *68th Annual International Meeting, Society of Exploration Geophysics*, Expanded Abstracts, 1377 - 1380.
- PAÚL, P.J. 2006. 100 años del Espacio de Hilbert. *El País*, Circuito Científico.  
[http://elpais.com/diario/2006/02/22/futuro/1140562805\\_850215.html](http://elpais.com/diario/2006/02/22/futuro/1140562805_850215.html)
- POOMVISES, N.; KONGSUK, A.; LIBERTY, L.; MIKESELL, D.; SATITPITTAKUL, A. 2010. *Multichannel Analysis of Surface Wave - An Application to Diagnose Dam Bodies*. Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Applied Geophysics, Phuket, Tailandia.
- SASS, O. 2007. Bedrock detection and talus thickness assessment in the European Alps using geophysical methods. *Journal of Applied Geophysics*, 62(3), 254 - 269.
- SEISIMAGER/2D. 2009. *SeisImager2D Manual*, versión 3.3.
- SOLÍS, J. 2010. *Cartografía de los parámetros sísmicos en ingeniería estructural para la ciudad de Panamá*, Tesis de licenciatura en Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica de Panamá.
- STEPHENS, E. 1978. *Calculating earthwork factors using seismic velocities, California*. Department of Transportation, Report No. FHWA - CA - TL - 78 - 23.

- STEWART, R.H.; STEWART, J.L. Y WOODRING, W.P. 1980. *Geologic Map of the Panama Canal and Vecinity, Republic of Panama*, Scale 1:100.000, Department of the Interior United States Geological Survey.
- STUMPEL, H.; KAHLER, S.; MEISSNER, R. Y MILKEREIT, B. 1984. The use of seismic shear waves and compressional waves for lithological problems of shallow sediments. *Geophysical Prospecting*, 32(4), 662 - 675.
- TELFORD, W.M.; GELDART, L.P. Y SHERIFF, R.E. 1996. *Applied Geophysics*, Cambridge University Press, 770 p.
- TRAUTMANN, C.H. Y KULHAWY, F.H. 1987. *CUFAD - A computer program for compression and uplift foundation analysis and design*. Report EL - 4540 - CCM, vol. 16, Electric Power Research Institute, Palo Alto, California.
- TRIBALDOS, R. 2014. *Prototipo de estación sísmica a campo abierto con registro de señales de aceleración para el programa de instrumentación sísmica de la República de Panamá*, Tesis de Licenciatura de Ingeniería Civil, UTP.
- VALOIS, R. 2011. *Caractérisation structurale de morphologies karstiques superficielles et suivi temporel de l'infiltration a l'aide des méthodes électriques et sismiques*. Tesis Doctoral, Universidad Pierre et Marie Curie, París, Francia.
- YGER, A. 1999. *Théorie et analyse du signal*, Ediciones Ellipses, 264 p.